HdM Stuttgart **Studiengang AM3**
Prof. Dr. Michael Felten

Probeklausur zur Mathematik (253001)

Schreiben Sie mit einem **weichen Bleistift** und nehmen Sie ggfs Korrekturen mit einem **Radiergummi** vor. Lösen Sie die Multiple-Choice-Aufgaben durch **Schwärzen** der Kästchen (bitte keine Kreuze). Bei **Freitextaufgaben** schreiben Sie direkt in die vorgegebenen Rahmen, markieren Sie keine Kästchen direkt unter den Rahmen!

Multiple-Choice-Aufgaben, die mit dem Zeichen ♣ gekennzeichnet sind, können mehrere korrekte Antworten haben. Andere Aufgaben haben genau eine korrekte Antwort. Falsche Antworten ergeben Minuspunkte, jede Aufgabe wird mit mindestens Null Punkten abgeschlossen.

Bei vielen Multiple-Choice-Aufgaben sind vorher Rechnungen erforderlich. Führen Sie diese nicht auf der Klausur sondern auf einem **Extrablatt** durch, das Sie **nicht mit abgeben**.

Taschenrechner sind zugelassen, ansonsten **keine Hilfsmittel**. Sie haben **60 Minuten** Zeit zur Bearbeitung. Viel Erfolg!

Name, Vorname:

Test, Mark

Matrikelnummer bitte schwärzen:

☐ 0	☐ 0	☐ 0	☐ 0	☐ 0
■ 1	☐ 1	☐ 1	☐ 1	☐ 1
☐ 2	■ 2	☐ 2	☐ 2	☐ 2
☐ 3	☐ 3	■ 3	☐ 3	☐ 3
☐ 4	☐ 4	☐ 4	■ 4	☐ 4
☐ 5	☐ 5	☐ 5	☐ 5	■ 5
☐ 6	☐ 6	☐ 6	☐ 6	☐ 6
☐ 7	☐ 7	☐ 7	☐ 7	☐ 7
☐ 8	☐ 8	☐ 8	☐ 8	☐ 8
☐ 9	☐ 9	☐ 9	☐ 9	☐ 9

Aufgabe 1 ♣ Welche der folgenden Aussagen gelten in der O-Notation?

■ $x\ln(x) \in \mathrm{O}(x^2)$
■ $\sqrt{x}^3 \in \mathrm{O}(x^2)$
☐ $3^x \in \mathrm{O}(2^x)$
☐ $10x^3 \in \mathrm{O}(x\ln(x))$
☐ $x^5 \in \mathrm{O}(x^3)$
☐ $10x^3 \in \mathrm{O}(x\ln(x))$
☐ $x^3 \in \mathrm{O}(\ln(x))$
■ $100x \in \mathrm{O}(x^2)$
■ $x\ln(x) \in \mathrm{O}(10x^3)$

Aufgabe 2 ♣ Welche der folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathrm{C}[0,1]$ sind Vektorräume?

☐ $\{ \left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{smallmatrix}\right) \mid x_1 + x_2 = 2\}$
☐ $\{ \left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{smallmatrix}\right) \mid x_1 \cdot x_2 = x_3\}$
■ $\{ \left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{smallmatrix}\right) \mid x_1 + x_2 = x_3\}$
☐ $\{ \left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{smallmatrix}\right) \mid x_1 = x_2 \text{ oder } x_1 = x_3\}$
■ $\{f \in \mathrm{C}[0,1] \mid f(1) = 0\}$
☐ $\{f \in \mathrm{C}[0,1] \mid f \text{ hat max. endl. viele Nullstellen}\}$
☐ $\{f \in \mathrm{C}[0,1] \mid f(0) = 1\}$
☐ $\{f \in \mathrm{C}[0,1] \mid f \text{ ist monoton wachsend}\}$

Aufgabe 3 ♣ Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die periodische Funktion mit $f(x) = \begin{cases} \pi + x, & -\pi \le x \le 0 \\ \pi - x, & 0 \le x \le \pi \end{cases}$. Berechnen Sie alle Fourier-Koeffizienten von f. Welche Antworten sind richtig?

☐ $b_1 = \frac{4}{\pi}$
■ $a_2 = 0$
■ $a_k = 0$, k gerade
☐ $a_0 = \frac{1}{\pi}$
■ $b_5 = 0$
■ $a_1 = \frac{4}{\pi}$
■ $a_0 = \pi$
☐ $a_1 = 4\pi$
☐ $a_2 = \pi$
☐ $a_3 = 4\pi$
■ $a_k = \frac{4}{k^2\pi}$, k ungerade
☐ $b_k = \frac{4}{k^2\pi}$, k ungerade
■ $b_k = 0$, $k \in \mathbb{N}$
■ $a_3 = \frac{4}{9\pi}$
☐ $a_k = 0$, $k \in \mathbb{N}_0$
☐ $a_k = 0$, k ungerade

Aufgabe 4 ♣ Betrachten Sie die 2π-periodische Fortsetzung von $f(x) = \sin(x)\cdot\sin(x)$, $-\pi \le x \le \pi$. Welche Antworten sind richtig?

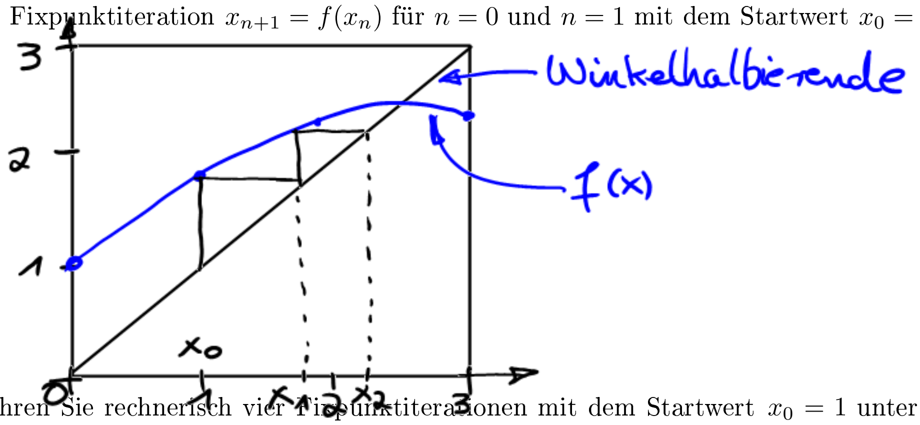
☐ $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx)$
■ $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx)$
☐ f ist eine ungerade Funktion
■ f ist eine gerade Funktion

Aufgabe 5

Betrachten Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -\frac{1}{5}x^2 + x + 1$. Zeigen Sie, dass f die zwei Fixpunkte $\pm\sqrt{5}$ hat. Welcher ist anziehend und welcher abstoßend?

$$f(\sqrt{5}) = -\frac{1}{5}(\sqrt{5})^2 + \sqrt{5} + 1 = -\frac{1}{5}\cdot 5 + \sqrt{5} + 1 = \sqrt{5}$$
$$f(-\sqrt{5}) = -\frac{1}{5}(-\sqrt{5})^2 - \sqrt{5} + 1 = -\frac{1}{5}\cdot 5 - \sqrt{5} + 1 = -\sqrt{5}$$

Zeichnen Sie die Funktion f und die Winkelhalbierende auf dem Intervall $[0, 3]$ und führen Sie grafisch die Fixpunktiteration $x_{n+1} = f(x_n)$ für $n = 0$ und $n = 1$ mit dem Startwert $x_0 = 1$ durch.



Führen Sie rechnerisch vier Fixpunktiterationen mit dem Startwert $x_0 = 1$ unter Verwendung von drei Nachkommastellen durch.

$x_1 = f(1) = 1{,}8$, $\quad x_3 = 2{,}225\ldots$

$x_2 = f(1{,}8) = 2{,}152$, $\quad x_4 = 2{,}\underline{23}4\ldots$, $\quad \sqrt{5} = 2{,}2360\ldots$

□ 0 □ 1 □ 2 □ 3 □ 4 □ 5 □ 6 □ 7 □ 8 □ 9

Aufgabe 6

Wenden Sie das Newton-Verfahren auf das Nullstellenproblem $f(x) = x^5 - 37 = 0$. Zeigen Sie, dass sich die Iterationsvorschrift des Newton-Verfahrens umformen lässt in $x_{n+1} = \frac{4x_n}{5} + \frac{37}{5x_n^4}$, $n = 0, 1, \ldots$:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^5 - 37}{5x_n^4}$$
$$= x_n - \frac{x_n}{5} + \frac{37}{5x_n^4} = \frac{4x_n}{5} + \frac{37}{5x_n^4}$$

Führen Sie zwei Iterationsschritte mit dem Startwert $x_0 = 2$ durch (sechs Nachkommastellen).

$x_1 = 2{,}0625$ $\qquad x_2 = 2{,}058936\ldots$

Gegen welche Nullstelle konvergiert die Iteration und wie viele Nachkommastellen sind in der zweiten Iteration exakt? Wie viele weitere Iterationsschritte sind etwa erforderlich, um 16 exakte Nachkommastellen zu berechnen? Begründen Sie Ihre Antwort.

$x^5 - 37 = 0 \iff x = \sqrt[5]{37}$, $\quad x_n \to \sqrt[5]{37} = 2{,}058924\ldots$

x_2 hat 4 exakte Nachkommastellen

Pro Iterationschritt etwa Verdopplung der Stellen.

3. Schritt: etwa 8 exakte Nachkommastellen

4. " " 16 " "

Also etwa zwei weitere Iterationsschritte erforderlich.

□ 0 □ 1 □ 2 □ 3 □ 4 □ 5 □ 6 □ 7 □ 8 □ 9

Aufgabe 7 ♣ Betrachten Sie die Funktion $f(x) = -\frac{1}{5}x^2 + x + 1$. Führen Sie rechnerisch vier Fixpunktiterationen mit dem Startwert $x_0 = 1$ unter Verwendung von drei Nachkommastellen durch. Welche Aussagen sind richtig?

- [ ] $x_2 = 2,1$
- [x] $x_4 = 2,234\ldots$
- [x] $x_1 = 1,8$
- [ ] $x_3 = 2,355\ldots$

Aufgabe 8 ♣ Welche Fixpunkte hat die Funktion $f(x) = 1 - x^2$?

- [x] $\frac{-\sqrt{5}-1}{2}$
- [x] $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$
- [ ] $-\sqrt{5} - 1$
- [ ] 1
- [ ] -1
- [ ] $\sqrt{5} - 1$

Aufgabe 9 Wie viele Fixpunkte hat die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + \sin(x)$?

- [ ] genau einen
- [ ] keinen
- [ ] genau zwei
- [x] unendlich viele

Aufgabe 10

Berechnen Sie die LR-Zerlegung der Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 6 & 1 & -10 \\ -2 & -7 & 8 \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{ccc|l} 2 & -1 & -3 & \mid \cdot(-3) \quad \mid \cdot(+1) \\ 6 & 1 & -10 & \leftarrow \\ -2 & -7 & 8 & \leftarrow \\ \hline 2 & -1 & -3 & \\ 0 & 4 & -1 & \mid \cdot 2 \\ 0 & -8 & 5 & \leftarrow \\ \hline 2 & -1 & -3 & \\ 0 & 4 & -1 & = R \\ 0 & 0 & 3 & \end{array}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Lösen Sie mit Hilfe der gewonnen LR-Zerlegung das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ für $b = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$:

$$b = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}: \quad 1.) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow y_1 = -2 \Rightarrow y_2 = 3 \Rightarrow y_3 = 3$$

$$2.) \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = 1 \Rightarrow x_2 = 1 \Rightarrow x_3 = 1$$

Lösung $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

- [ ] 0
- [ ] 1
- [ ] 2
- [ ] 3
- [ ] 4
- [ ] 5
- [ ] 6
- [ ] 7
- [ ] 8
- [ ] 9

Aufgabe 11

Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$, und wenden Sie zur Lösung das Gesamtschrittverfahren an. Tipp: $x = -D^{-1}(L+R)x + D^{-1}b$.

Geben Sie die Matrizen D, L, R und $L+R$ explizit an:

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L+R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $-D^{-1}$, $-D^{-1}(L+R)$ und $D^{-1}b$:

$$-D^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad -D^{-1}(L+R) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad D^{-1}b = \begin{pmatrix} \frac{7}{4} \\ \frac{7}{4} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Überprüfen Sie das Zeilen- und Spaltensummenkriterium. Ist die Konvergenz des Gesamtschrittverfahrens gesichert?

$1 + 2 < 4$ ✓
$2 + 1 < 4$ ✓
$0 + 1 < 2$ ✓

Zeilensummenkriterium erfüllt
$\Rightarrow$ GSV konvergiert

$0 + 2 < 4$ ✓
$1 + 1 < 4$ ✓
$2 + 1 < 2$ f

Spaltensummenkriterium <u>nicht</u> erfüllt

Führen Sie zwei Iterationsschritte mit dem Startvektor $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ unter Verwendung rationaler Zahlen (exakte Rechnung) durch:

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{7}{4} \\ \frac{7}{4} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{4} \\ \frac{7}{4} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{7}{4} \\ \frac{7}{4} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{7}{4} \\ \frac{7}{4} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/16 \\ 1/2 \\ 5/8 \end{pmatrix}$$

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☐ 9