Hochschule der Medien Prof. Dr. Michael Felten

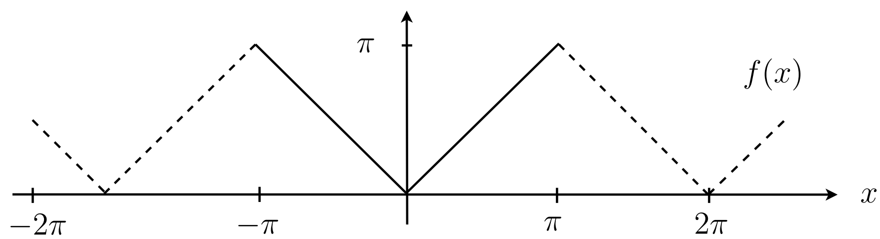
Übungen zur Mathematik

Blatt 4

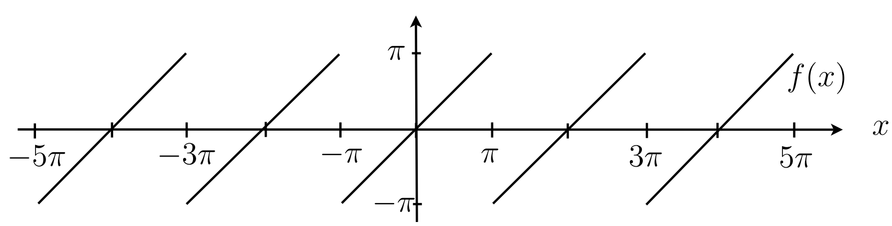
Aufgabe 1: Bestimmen Sie die Fourier-Reihe der im Bild skizzierten periodischen Funktion, die im Periodenintervall $[-\pi, \pi]$ durch die Gleichung

$$f(x) = |x|$$

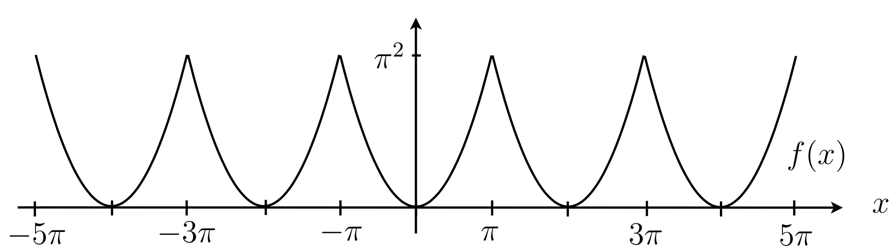
beschrieben wird. Zeichnen Sie die ersten drei Näherungsfunktionen der Fourier-Reihe.



Aufgabe 2: Wie lautet die Fourier-Entwicklung der im Bild dargestellen Sägezahnfunktion?



Aufgabe 3: Gegeben sei die im Bild dargestellte Funktion, die im Periodenintervall $[-\pi, \pi]$ durch die Gleichung $f(x) = x^2$ beschrieben wird.



Entwickeln Sie f in eine Fourier-Reihe.

Übungen zur Mathematik

Blatt 5

Aufgabe 1: Wie lauten die Fixpunkte der folgenden Funktionen?

a) $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - x^2$

b) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + \sin(x)$

Aufgabe 2: Betrachten Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + \sin(x)$. Diese Funktion hat auf dem Intervall $[0, 2\pi]$ drei Fixpunkte.

a) Wo liegen diese Fixpunkte? Zeichnen Sie die Funktion f, die Winkelhalbierende und die Fixpunkte. Führen Sie grafisch die Fixpunktiteration $x_{n+1} = f(x_n)$ für $n = 0, 1, 2$ mit dem Startwert $x_0 = 1$ durch.

b) Führen Sie rechnerisch fünf Fixpunktiterationen mit dem Startwert $x_0 = 1$ mit möglichst vielen Nachkommastellen durch. Verifizieren Sie, dass die Iterierten gegen

$$\pi = 3,141592653589793\ldots$$

konvergieren.

c) Führen Sie wie unter c) Fixpunktiterationen mit dem Startwert $x_0 = 5$ durch. Was passiert, wenn Sie mit dem Startwert $x_0 = 0$ beginnen?

d) Führen Sie die Fixpunktiterationen jeweils mit den Startwerten $x_0 = 7$ und $x_0 = -1$ durch. Gegen welche Zahlen konvergieren die Iterationen? Begründen Sie Ihre Antwort.

e) Was passiert, wenn die Iteration mit einem Startwert x_0 aus einem Intervall $[k\pi, (k+2)\pi]$, $k = 0, \pm 2, \pm 4, \ldots$, durchgeführt wird?

Übungen zur Mathematik

Blatt 6

Aufgabe 1: Es sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben, die im Periodenintervall $[-\pi, \pi]$ durch die Gleichung $f(x) = e^x$ definiert ist.

a) Bestimmen Sie die komplexe Form der Fourier-Reihe von f.

b) Wie lautet die Fourier-Reihe von f in reeller Darstellung? Verwenden Sie für die Rechnung die Ergebnisse aus Teilaufgabe a).

Aufgabe 2: Bestimmen Sie die Fouriertransformation folgender Funktionen.

a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

b) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = e^{-|x|}$

c) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} xe^{-x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

Aufgabe 3: Berechnen Sie die Fouriertransformation folgender Funktionen unter Verwendung der Sätze für die Streckung, Verschiebung und Linearität.

a) $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = \begin{cases} e^{-ax}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$ mit $a > 0$

b) $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = e^{-|x-a|}$ mit $a \in \mathbb{R}$

c) $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = \begin{cases} (1+x)e^{-x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

Hochschule der Medien Prof. Dr. Michael Felten

Übungen zur Mathematik

Blatt 7

Aufgabe 1: Berechnen Sie mit Hilfe der Fixpunktiteration $x_{n+1} = f(x_n)$ die Fixpunkte der Funktionen

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{-2x}, \quad x \in (0,1), \quad \text{und} \quad f(x) = 2\sin(x), \quad x \in (0,2),$$

wobei für die erste Funktion der Startwert $x_0 = 0.2$ und für die zweite Funktion der Startwert $x_0 = 1$ gewählt werde. Führen Sie zehn Iterationen durch. Wieviele Nachkommastellen sind exakt?

Aufgabe 2: Betrachten Sie die Funktionen $f_\alpha\colon [0,1] \to [0,1],\ f_\alpha(x) = \alpha x(1-x)$. Der Parameter α erfülle die Bedingung $1 < \alpha \leq 4$.

a) f_α hat auf dem Intervall $(0,1]$ genau einen Fixpunkt x_α^*. Bestimmen Sie x_α^*.

b) Für welche α ist der Fixpunkt anziehend und für welche abstoßend?

c) Wählen Sie als Startwert $x_0 = 1/4$ und führen Sie die Parabeliteration $x_{n+1} := f_\alpha(x_n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ durch und diskutieren Sie die Fälle $1 < \alpha \leq 2$ und $2 < \alpha < 3$. Inwieweit unterscheidet sich die Konvergenz?

d) Wählt man α nur wenig größer als 3, so ergibt sich ein überraschender Effekt. Beschreiben Sie diesen und wählen Sie $\alpha \in (3, 3.4)$.

e) Jenseits eines bestimmten Steuerparameters α^* tritt *Chaos* ein. Die Iterierten springen wirr hin und her. Bestimmen Sie α^* ungefähr.

Übungen zur Mathematik

Blatt 8

Aufgabe 1: Bestimmen Sie iterativ einen Fixpunkt des Polynoms

$$p(x) = \frac{1}{5}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - 1, \quad x \in (-5, 2),$$

wobei als Startwerte folgende Zahlen gewählt werden: $x_0 = 0$ sowie die Näherungswerte $x_0 = -0.7$ und $x_0 = 1.55$ für zwei der Fixpunkte $x_1^* = -0.700626349$ und $x_2^* = 1.551210027$ von p. Führen Sie die Iteration durch.

Aufgabe 2:

a) Berechnen Sie

$$\sqrt{11} = 3.316624790355399\ldots$$

iterativ mit Hilfe der Fixpunktgleichung

$$-\frac{1}{11}x^2 + x + 1 = x.$$

Führen Sie beginnend mit dem Startwert $x_0 = 2$ die Iterationen durch. Verwenden Sie dabei das in Aufgabe 1 erwähnte Applet. Wieviele Iterationsschritte sind erforderlich, um 16 exakte Nachkommastellen zu erhalten?

b) Berechnen Sie $\sqrt{7}$ und $\sqrt{23}$ mit Hilfe geeigneter Fixpunktgleichungen.

Hochschule der Medien | Prof. Dr. Michael Felten

Übungen zur Mathematik

Blatt 9

Aufgabe 1: Wie lauten die Fixpunkte der folgenden Funktionen?

a) $f_1(x) = \frac{1}{3} + x - \frac{1}{111}x^5$,

b) $f_2(x) = \frac{1}{4} + x - \frac{1}{148}x^5$,

c) $f_3(x) = \frac{37}{3} + x - \frac{1}{3}x^5$.

Welche Fixpunkte sind anziehend und welche abstoßend?

Aufgabe 2: Berechnen Sie

$$\sqrt[5]{37} = 2.058924136478517\ldots$$

iterativ jeweils mit Hilfe der Fixpunktgleichungen

$$f_1(x) = x, \quad f_2(x) = x \quad \text{und} \quad f_3(x) = x$$

(unter Verwendung der Funktionen aus Aufgabe 1). Führen Sie beginnend mit dem Startwert $x_0 = 2$ jeweils die Iterationen durch.

a) Welche Fixpunktiterationen konvergieren, welche divergieren? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Vergleichen Sie die Konvergenzgeschwindigkeit.

c) Bestimmen Sie positive Konstanten L_1 und L_2, so dass

$$|f_1'(x)| \le L_1 \quad \text{und} \quad |f_2'(x)| \le L_2$$

für $x \in [2, 2.1]$ gilt.

d) Leiten Sie aus der Ungleichung

$$|x_n - \sqrt[5]{37}| \le \frac{L^n}{1-L}|x_1 - x_0|$$

eine Fehlerabschätzung her.

Hochschule der Medien Prof. Dr. Michael Felten

Übungen zur Mathematik

Blatt 10

Aufgabe 1: Berechnen Sie

$$\sqrt[5]{37} = 2.058924136478517\ldots$$

näherungsweise.

a) Wenden Sie das Newton-Verfahren auf die Funktion $f(x) = x^5 - 37$ an. Führen Sie mit einem Taschenrechner zwei Iterationen durch. Wählen Sie als Startwert $x_0 = 2$.

b) Wieviele weitere Iterationsschritte sind etwa erforderlich, um 16 exakte Nachkommastellen zu berechnen?

c) Vergleichen Sie die Iteration mit der von Aufgabe 2 auf Blatt 4.

Aufgabe 2: Betrachten Sie die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = e^x + x - 2.$$

Diese Funktion hat im Intervall $[0, 1]$ eine Nullstelle. Berechnen Sie diese näherungsweise mit dem Newton-Verfahren unter Benutzung eines Taschenrechners. Verwenden Sie möglichst viele Nachkommastellen, und wählen Sie als Startwert $x_0 = 1$. Wieviele Iterationen sind notwendig, um 16 Nachkommastellen exakt zu berechnen?

Aufgabe 3: Gegeben sei die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = x + \frac{1}{2}(3 - e^x).$$

Bestimmen Sie mit dem Newton-Verfahren näherungsweise die beiden Nullstellen, die etwa bei 1.5 und -1.0 liegen. Verwenden Sie dazu einen Taschenrechner und berechnen Sie die Nullstellen auf 9 Nachkommastellen genau.

Übungen zur Mathematik

Blatt 12

Aufgabe 1: Gegeben seien $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$. Die Iterationsvorschrift des Gesamtschrittverfahrens lautet

$$x^{(m+1)} := -D^{-1}(L+R)x^{(m)} + D^{-1}b, \qquad m = 0, 1, \ldots \tag{$*$}$$

a) Geben Sie die Matrizen D, L und R an.

b) Berechnen Sie D^{-1}, $-D^{-1}(L+R)$ und $D^{-1}b$.

c) Überprüfen Sie die Konvergenz von $(*)$, indem Sie das Zeilensummenkriterium anwenden.

d) Ist das Spaltensummenkriterium erfüllt?

e) Führen Sie vier Iterationsschritte mit dem Startvektor $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ unter Verwendung rationaler Zahlen (exakte Rechnung) durch.