Hochschule der Medien Prof. Dr. Michael Felten

Übungen zur Mathematik

Blatt 1

Aufgabe 1: Welche der folgenden Sätze bzw. Zeichenketten sind Aussagen? Welche sind wahr, welche sind falsch?

a) 7 ist durch 2 teilbar.

b) Stuttgart liegt am Rhein.

c) Stuttgart hat viele Einwohner.

d) 2 teilt 12.

e) $2^6 - 1$ ist eine Primzahl.

f) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 1024$.

Aufgabe 2: Stellen Sie den Wahrheitsverlauf der folgenden zusammengesetzten Aussagen in einer Wahrheitstabelle dar.

a) $(A \wedge B) \Rightarrow (\neg A \vee B)$

b) $((\neg A \Rightarrow B) \wedge \neg B) \Leftrightarrow A$

c) $(A \wedge (A \Rightarrow B)) \Leftrightarrow B$

d) $(A \wedge B) \wedge (\neg(A \Leftrightarrow B))$

Welche dieser zusammengesetzten Aussagen sind stets wahr und welche stets falsch?

Aufgabe 3:

a) Geben Sie die Menge der Buchstaben des Wortes MISSISSIPPI an.

b) Geben Sie die Menge der Buchstaben Ihres Namens an.

c) Geben Sie die Menge der Ziffern der Zahl 31122020 an.

d) Wie lautet die Vereinigungsmenge $\{a, u, g, e, n\} \cup \{o, h, r, e, n\}$?

e) Sind die Mengen $\{b, l, e, i\}$ und $\{l, e, i, b\}$ gleich? Wieviele Möglichkeiten gibt es, sie in dieser Form aufzuschreiben?

Aufgabe 4: Gegeben seien die Mengen

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\},$$

$$B = \{n \mid n \in \mathbb{N} \text{ und } n \leq 4\},$$

$$C = \{n \mid n \in \mathbb{N} \text{ und } n \text{ gerade und } n < 5\},$$

$$D = \{n \mid n \in \mathbb{N} \text{ und } n \text{ gerade und } n \leq 11\}.$$

Bestimmen Sie $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \cap C$, $A \cap D$, $C \setminus D$, $D \setminus C$.

Aufgabe 5: Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.

a) $f\colon \{-1, 0, 2, 4\} \to \{-5, -2, 4, 10, 15\},\ f(x) = 3x - 2.$

b) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 3x - 2.$

c) $f\colon \{-2, 0, 1, 2\} \to \{0, 1, 4\},\ f(x) = x^2.$

d) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 + 1.$

Aufgabe 6: Welche der folgenden Aussagen gelten in der O-Notation?

a) $100x \in \mathrm{O}(x^2)$ b) $x^5 \in \mathrm{O}(x^3)$

c) $x \ln(x) \in \mathrm{O}(x^2)$ d) $3^x \in \mathrm{O}(2^x)$

Aufgabe 7: Ordnen Sie folgende Funktionen in der O-Notation an. Zum Beispiel $O(f_1) \subset O(f_3)$.

$f_1(x) = x \ln(x)$ $f_2(x) = x^2$

$f_3(x) = (\sqrt{n})^3$ $f_4(x) = x^x$

$f_5(x) = 10x^2 + x^3$ $f_6(x) = 5 \ln(x)$

$f_7(x) = 10x^3$ $f_8(x) = \ln(\ln(x))$

Hochschule der Medien Prof. Dr. Michael Felten

Übungen zur Mathematik

Blatt 2

Aufgabe 1: Geben Sie zu folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^3$ an, ob sie Vektorräume sind, und begründen Sie dies.

a) $V_1 = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Big| x_1 + x_2 = 2\}$ b) $V_2 = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Big| x_1 + x_2 = x_3\}$

c) $V_3 = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Big| x_1 \cdot x_2 = x_3\}$ d) $V_4 = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Big| x_1 = x_2 \text{ oder } x_1 = x_3\}$

Aufgabe 2: Welche der folgenden Teilmengen des $\mathrm{C}[0,1]$ sind Vektorräume? Begründen Sie Ihre Antworten.

a) $V_1 = \{f \mid f \in \mathrm{C}[0,1], f(1) = 0\}$

b) $V_2 = \{f \mid f \in \mathrm{C}[0,1], f(0) = 1\}$

c) $V_3 = \{f \mid f \in \mathrm{C}[0,1], f \text{ hat höchstens endlich viele Nullstellen}\}$

d) $V_4 = \{f \mid f \in \mathrm{C}[0,1], f \text{ ist monoton wachsend}\}$

Aufgabe 3:

a) Berechnen Sie die euklidische Norm, L_1-Norm und Maximum-Norm der folgenden Vektoren:

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

b) Skizzieren Sie die Einheitssphäre $S_p = \{x \mid x \in \mathbb{R}^2, \|x\|_p = 1\}$ für $p = 2$, $p = 1$ und $p = \infty$.

Aufgabe 4: Berechnen Sie die Normen $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_\infty$ der folgenden Funktionen:

a) $f \in \mathrm{C}_{2\pi}$, $f(x) = \cos(x)$

b) $g \in \mathrm{C}_{2\pi}$, $g(x) = \sin(x)$

c) $h \in \mathrm{C}[1,2]$, $h(x) = \frac{1}{x^2}$

Hochschule der Medien Prof. Dr. Michael Felten

Übungen zur Mathematik

Blatt 3

Aufgabe 1: Bilden Sie die Skalarprodukte von je zwei der folgenden Vektoren. Welche Vektoren stehen senkrecht aufeinander?

$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ -19 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2: Berechnen Sie $\langle \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle + \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle - \langle \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$, indem Sie tatsächlich nur ein einziges Skalarprodukt ausrechnen.

Aufgabe 3: $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ sei ein Hilbertraum und $\|\cdot\|$ die induzierte Norm. Es seien $x, y, z \in H$ Einheitsvektoren, d.h. es gelte $\|x\| = 1$, $\|y\| = 1$, $\|z\| = 1$.

a) Berechnen Sie $\|x + y + z\|^2$ mit Hilfe des Skalarproduktes.

b) Bestimmen Sie $\langle x, y\rangle + \langle y, z\rangle + \langle z, x\rangle$ unter der Annahme, dass $x + y + z = 0$ ist.

Aufgabe 4: $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ sei ein Hilbertraum und $\|\cdot\|$ die induzierte Norm. Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in H$ die Parallelogrammgleichung gilt:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Aufgabe 5: Es seien $c_k, s_k \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $c_k(x) = \cos(kx)$ und $s_k(x) = \sin(kx)$. Zeigen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}$

a) $C_n = \{c_0, c_1, \ldots, c_n\}$,

b) $S_n = \{s_1, \ldots, s_n\}$,

c) $T_n = C_n \cup S_n$

Orthogonalsysteme sind bezüglich des Integralskalarproduktes $\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx$.
Hinweis: Verwenden Sie die Identitäten $2c_kc_j = c_{k+j} + c_{k-j}$, $2s_ks_j = -c_{k+j} + c_{k-j}$ und $2c_ks_j = s_{k+j} + s_{k-j}$.

Aufgabe 6: Es seien $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$. Zeigen Sie, dass $\{P_0, P_1, P_2\}$ ein *Orthogonalsystem* ist bezüglich des Integralskalarproduktes $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$.