Vektorräume

Dienstag, 17. September 2019 12:01

Lösungen zu Vektorräumen

Aufgabe 1

a) Es ist $0 \notin V_1$. Daher ist V_1 kein Vektorraum.

Beweis: Aus den Vektorraumgesetzen folgert man sofort, dass der Nullvektor immer ein Element des Vektorraums V ist, d.h. $0 \in V$. Denn für $x \in V$ gilt:

$$(-1) \cdot x = -x \in V$$

$$\Rightarrow \quad x + (-x) \overset{(V1)}{=} 0 \in V. \quad \square$$

b) Es ist $x_3 = x_1 + x_2$ eine Geradengleichung. Alle Vektoren $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, die auf der Geraden liegen, liegen in V_2.

Es seien $x, y \in V_2$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$x_1 + x_2 = x_3 \quad \text{und} \quad y_1 + y_2 = y_3$$

Hieraus folgt:

$$(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) = x_3 + y_3$$

$$\lambda x_1 \quad + \quad \lambda_2 \quad = \lambda x_3$$

bzw. $\quad \big(x_1 + y_1 \quad\quad \big(x_1 \quad \big(y_1$

bzw. $$\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ x_3+y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = x+y \in V_2$$

$$\begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda x \in V_2 .$$

Die Gesetze (V1) und (V2) sind automatisch erfüllt, da $\mathbb{R}^3$ ein Vektorraum ist.

Also ist V_2 ein Vektorraum.

c) Es ist $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in V_3$, aber $(-1) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \notin V_3$.

Damit ist das Gesetz (V2) nicht erfüllt und V_3 ist kein Vektorraum.

d) Es ist $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \in V_4$, aber

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \notin V_4 .$$

Aufgabe 2:

a) V_1 ist ein Vektorraum. Denn es gilt:

$$f, g \in V_1 \Rightarrow (f+g)(1) = \underbrace{f(1)}_{0} + \underbrace{g(1)}_{0} = 0$$

$$\text{d.h. } f+g \in V_2$$

$$f \in V_1, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow (\lambda f)(1) = \lambda \underbrace{f(1)}_{0} = 0$$

$$\text{d.h. } \lambda f \in V_1$$

Die Vektorraumgesetze $(V_1), (V_2)$ sind automatisch erfüllt, da $C[0,1]$ ein Vektorraum und $V_1 \subset C[0,1]$ ist.

b) V_2 ist kein Vektorraum, denn $0 \notin V_2$.

c) V_3 ist kein Vektorraum, denn $0 \notin V_3$.

d) V_4 ist kein Vektorraum, denn es ist

$$f: [0,1] \to \mathbb{R}, \underbrace{f(x) = x}_{\text{monoton wachsend}}, f \in V_4,$$

$$\text{aber } (-1) \cdot f = \underbrace{-f}_{\text{monoton fallend}} \notin V_4$$

Aufgabe 3

a) $\|x\|_2 = \left\|\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\|_2 = \sqrt{1^2+0^2+0^2} = 1$

$$\|x\|_1 = 1+0+0 = 1$$

$$\|x\|_\infty = \max\{0,1\} = 1$$

$$\|y\|_{\cdot} = \left\|\begin{pmatrix}1\\1\\ \cdot\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{3}$$

$$\|y\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|_2 = \sqrt{3}$$

$$\|y\|_1 = 3$$

$$\|y\|_\infty = 1$$

$$\|v\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \right\|_2 = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 5^2} = \sqrt{30}$$

$$\|v\|_1 = 2 + |-1| + 5 = 8$$

$$\|v\|_\infty = 5$$

$$\|w\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\|_2 = \sqrt{0 + (-4)^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$$

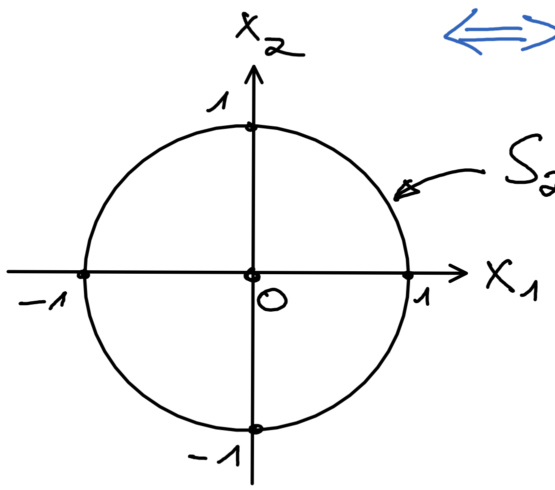
$$\|w\|_1 = 0 + |-4| + 3 = 7$$

$$\|w\|_\infty = 4$$

b) Einheitsshäre $S_p = \{ x \mid x \in \mathbb{R}^2, \|x\|_p = 1 \}$

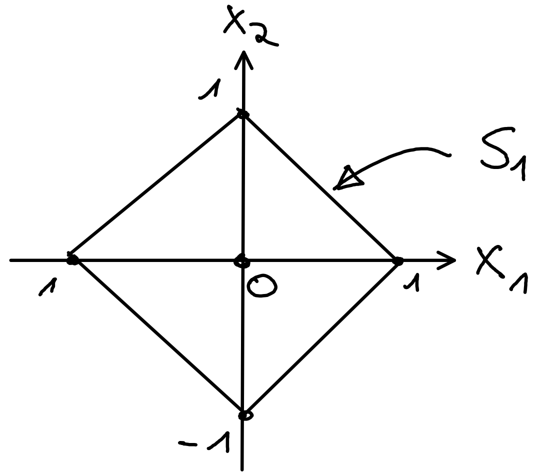
<u>$p=2$:</u> $S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| \underbrace{\sqrt{x_1^2 + x_2^2} = 1}_{} \right\}$

$\iff x_1^2 + x_2^2 = 1$

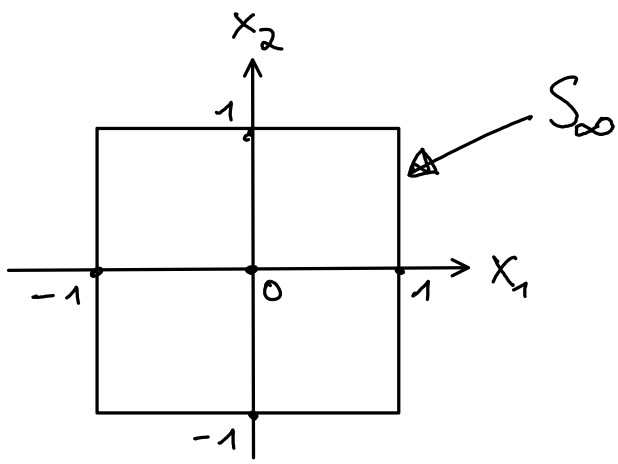


S_2 ist der Einheitskreis

$\underline{p=1:}$ $\quad S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \;\middle|\; |x_1| + |x_2| = 1 \right\}$



$\underline{p=\infty:}$ $\quad S_\infty = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \;\middle|\; \max\{|x_1|, |x_2|\} = 1 \right\}$



Aufgabe 4

a) $f \in C_{2\pi}$, $f(x) = \cos(x)$

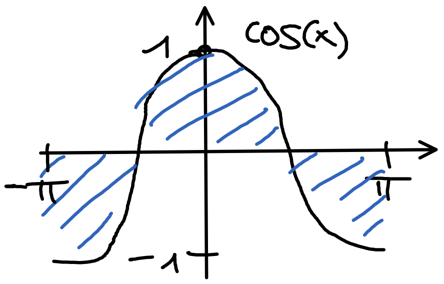
$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(x)\,dx} = \sqrt{\left[\frac{1}{2}(x + \sin(x)\cos(x))\right]_{-\pi}^{\pi}}$$

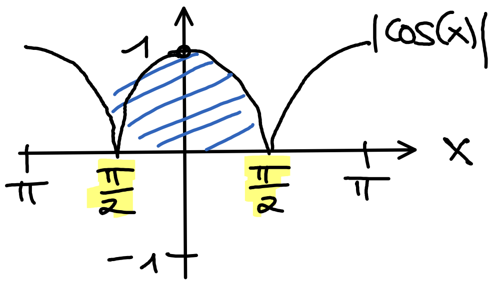
Formelsammlung

$$= \sqrt{\frac{1}{2}\left((\pi + 0) - (-\pi + 0)\right)}$$

$$= \sqrt{\pi}$$

$$\|f\|_1 = \int_{-\pi}^{\pi} |\cos(x)|\,dx = 2\cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,dx$$





$$= 2\cdot \left[\sin(x)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\left(1-(-1)\right)$$

$$= 4$$

$$\|f\|_\infty = \max\{|\cos(x)| \mid x\in[-\pi,\pi]\}$$

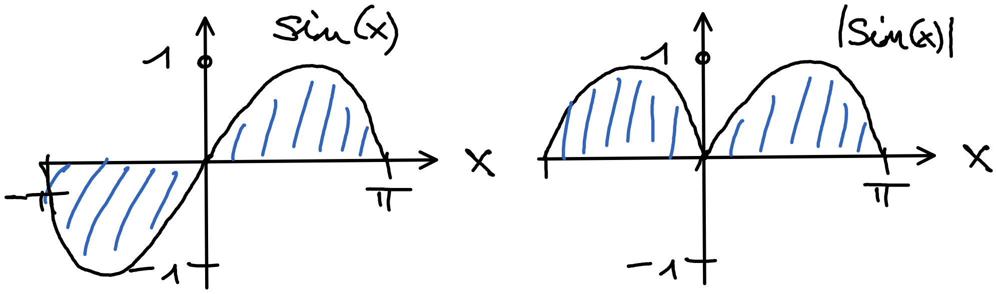
$$= 1$$

b) $g\in C_{2\pi}$, $g(x) = \sin(x)$

$$\|g\|_2 = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\sin^2(x)}_{1-\cos^2(x)}\,dx} = \sqrt{\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} 1\,dx}_{=2\pi} - \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(x)\,dx}_{=\pi\ \text{(siehe a)}}}$$

$$= \sqrt{\pi}$$

$$\|g\|_1 = \int_{-\pi}^{\pi} |\sin(x)|\,dx$$



$= 4$ (wie oben bei a)

$\|g\|_\infty = \max\{|\sin(x)| \mid x \in [-\pi, \pi]\}$

$= 1$

c) $h \in C[1,2]$, $h(x) = \frac{1}{x^2}$

$\|h\|_2 = \sqrt{\int_1^2 \left(\frac{1}{x^2}\right)^2 dx} = \sqrt{\int_1^2 x^{-4} dx}$

$= \sqrt{\left[\frac{1}{-3} x^{-3}\right]_1^2} = \sqrt{-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{8} - 1\right)}$

$= \frac{}{3}\sqrt{\frac{1}{24} \quad 1} = \sqrt{\frac{\cancel{21}\,7}{\cancel{72}\,24}}$

$= 0{,}54\ldots$

$\|h\|_1 = \int_1^2 \left|\frac{1}{x^2}\right| dx = \int_1^2 x^{-2} dx$

$= \left[\frac{1}{-1} x^{-1}\right]_1^2 = -\left(\frac{1}{2} - 1\right)$

$$= \frac{1}{2}$$

$$\|h\|_\infty = \max \left\{ \frac{1}{x^2} \,\middle|\, x \in [1,2] \right\} = h(1)$$

$$= 1$$