Hilberträume

Mittwoch, 18. September 2019 19:35

Lösungen zu Hilberträumen

Aufgabe 1

$\langle a,b\rangle = 11$, $\langle a,c\rangle = 0$, $\langle a,d\rangle = 25$, $\langle a,e\rangle = -1$

$\langle b,c\rangle = 0$, $\langle b,d\rangle = 17$, $\langle b,e\rangle = -35$

$\langle c,d\rangle = -7$, $\langle c,e\rangle = 76$

$\langle d,e\rangle = 0$

$a \perp c$] a steht senkrecht auf c

$b \perp c$

$d \perp e$

Aufgabe 2

$$\langle \underbrace{\begin{pmatrix}4\\5\\3\end{pmatrix}}_{a}, \underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}}_{b} \rangle + \langle \underbrace{\begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix}}_{c = 2b}, \underbrace{\begin{pmatrix}8\\7\\1\end{pmatrix}}_{d} \rangle - \langle \underbrace{\begin{pmatrix}3\\6\\3\end{pmatrix}}_{e = 3b}, \underbrace{\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}}_{f} \rangle$$

Für das Skalarprodukt gelten das Kommutativgesetz, das Distributivgesetz, sowie das Assoziativgesetz. Deshalb ist

$$\underbrace{\langle a,b\rangle}_{\langle b,a\rangle} + \underbrace{\langle 2b,d\rangle}_{2\langle b,d\rangle = \langle b,2d\rangle} - \underbrace{\langle 3b,f\rangle}_{\langle b,3f\rangle}$$

$$= \langle b,a\rangle + \langle b,2d\rangle - \langle b,3f\rangle$$

$$= \langle b, a+2d-3f \rangle$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\5\\3\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}8\\7\\1\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}26\\13\\2\end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= 54$$

Aufgabe 3

a) Es ist $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$

bzw. $\|x\|^2 = \langle x, y \rangle$.

Daher gilt

$$\|x+y+z\|^2 = \langle x+y+z, x+y+z \rangle$$

$$= \langle x, x+y+z \rangle + \langle y, x+y+z \rangle + \langle z, x+y+z \rangle$$

$$= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$$
$$+ \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle + \langle y, z \rangle$$
$$+ \langle z, x \rangle + \langle z, y \rangle + \langle z, z \rangle$$

$$= \|x\|^2 + \|y\|^2 + \|z\|^2$$
$$+ 2\left(\langle x, y \rangle + \langle y, z \rangle + \langle z, x \rangle \right)$$

b) Wenn $x+y+z=0$ ist, ist $\|x+y+z\| = 0$.

Aus $\|x\| = \|y\| = \|z\| = 1$ folgt mit der

Darstellung unter a)

$$0 = \underbrace{1+1+1}_{3} + 2(\langle x,y\rangle + \langle y,z\rangle + \langle z,x\rangle)$$

und schließlich

$$\langle x,y\rangle + \langle y,z\rangle + \langle z,x\rangle = -\frac{3}{2}.$$

Aufgabe 4

Es ist

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle \\ &= \langle x, x+y\rangle + \langle y, x+y\rangle \\ &= \underbrace{\langle x,x\rangle}_{\|x\|^2} + \underbrace{\langle x,y\rangle + \underbrace{\langle y,x\rangle}_{\langle x,y\rangle}}_{2\langle x,y\rangle} + \underbrace{\langle y,y\rangle}_{\|y\|^2} \end{aligned}$$

bzw.

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2$$

Setzen wir hier $-y$ statt y ein, erhalten wir sofort

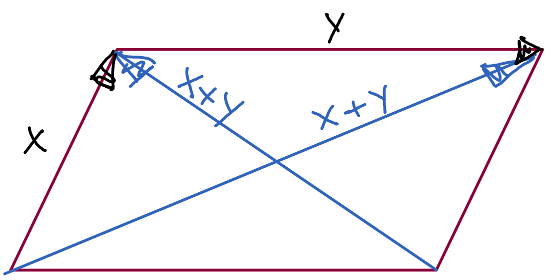
$$\begin{aligned} \|x-y\|^2 &= \|x\|^2 + 2\underbrace{\langle x,-y\rangle}_{-\langle x,y\rangle} + \underbrace{\|-y\|^2}_{\|y\|^2} \\ &= \|x\|^2 - 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2. \end{aligned}$$

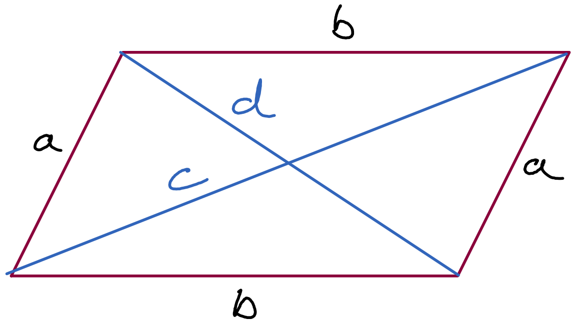
Also gilt

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Parallelogrammgleichung

Veranschaulichung im $\mathbb{R}^2$:





$$2(a^2+b^2) = c^2+d^2$$

Aufgabe 5

a) Für $k, j \in \mathbb{N}_0$ und $k \neq j$ gilt

$$\langle c_k, c_j \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\cos(kx)\cos(jx)}_{\frac{1}{2}\cos((k+j)x) + \frac{1}{2}\cos((k-j)x)} dx = 0.$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((k+j)x)}{k+j}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((k-j)x)}{\underbrace{k-j}_{\neq 0}}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \quad 0 \quad + \quad 0$$

$$= 0$$

Also ist $\{c_0, \ldots, c_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, ein Orthogonalsystem.

b) Für $k, j \in \mathbb{N}$ und $k \neq j$ gilt

$$\langle s_k, s_j \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\sin(kx)\sin(jx)}_{= -\frac{1}{2}\cos((k+j)x) + \frac{1}{2}\cos((k-j)x)} dx$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{\sin((k+j)x)}{k+j}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((k-j)x)}{\underbrace{k-j}_{\neq 0}}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= 0 + 0 \quad \text{wegen } \sin(m\pi) = 0,\ m \in \mathbb{N}$$

$$= 0$$

Also ist $\{s_1, \ldots, s_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, ein Orthogonalsystem.

c) Es sei $k \in \mathbb{N}_0$ und $j \in \mathbb{N}$.

Für $k \neq j$ gilt

$$\langle c_k, s_j \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\cos(kx)\sin(jx)}_{\frac{1}{2}\sin((k+j)x) + \frac{1}{2}\sin((k-j)x)} dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-\cos((k+j)x)}{k+j}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2}\left[\frac{-\cos((k-j)x)}{\underbrace{k-j}_{\neq 0}}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= 0 + 0 \quad \text{wegen } \cos(-x) = \cos(x)$$

$$= 0$$

Für $k = j$ gilt

Für $k=j$ gilt

$$\langle c_k, s_k\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\cos(kx)\sin(kx)}_{\frac{1}{2}\sin((k+k)x) + \underbrace{\frac{1}{2}\sin((\underbrace{k-k}_{0})x)}_{0}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-\cos((k+j)x)}{k+j}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= 0 \qquad (\text{s.o.})$$

Also ist $\{c_0, \dots, c_n\} \cup \{s_1, \dots, s_n\}$ ein Orthogonalsystem.

Aufgabe 6

Gegeben sind die Polynome

$$P_0(x) = 1,$$

$$P_1(x) = x,$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1).$$

Wir berechnen die Skalarprodukte:

$$\langle P_0, P_1\rangle = \int_{-1}^{1} 1\cdot x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{1} = 0$$

$$\langle P_0, P_2\rangle = \int_{-1}^{1}\left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right)dx = \left[\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x\right]_{-1}^{1}$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\langle P_1, P_2\rangle = \int_{-1}^{1} x\cdot\frac{1}{2}(3x^2 - 1)\,dx$$

$$\langle P_1, P_2 \rangle = \int_{-1}^{1} x \cdot \frac{1}{2}\left(3x^2 - \frac{1}{2}\right) dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(\frac{3}{2}x^3 - \frac{1}{2}x\right) dx = \left[\frac{3}{8}x^4 - \frac{1}{4}x^2\right]_{-1}^{1}$$

$$= \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{4}\right) = 0$$

Also ist $\{P_0, P_1, P_2\}$ ein Orthogonalsystem.