Aussagen und Mengen

Freitag, 13. September 2019 14:33

Lösungen zu Aussagen und Mengen

Aufgabe 1

a) falsche Aussage

b) falsche Aussage

c) keine Aussage

d) wahre Aussage

e) falsche Aussage, da
$2^6 - 1 = 64 - 1 = 63 = 7 \cdot 9$
keine Primzahl ist

f) wahre Aussage ($2^{10} = 1024$)

Aufgabe 2

a)

A	B	$A \wedge B$	$\neg A \vee B$	$(A \wedge B) \Rightarrow (\neg A \vee B)$
w	w	w	w	w
w	f	f	f	w
f	w	f	w	w
f	f	f	w	w

stets wahr

Wahrheitsverlauf der Aussage

b)

A	B	$\neg A \Rightarrow B$	$(\neg A \Rightarrow B) \land \neg B$	$((\neg A \Rightarrow B) \land \neg B) \Leftrightarrow A$
w	w	w	f	f
w	f	w	w	w
f	w	w	f	w
f	f	f	f	w

Wahrheitsverlauf der Aussage

c)

A	B	$A \Rightarrow B$	$A \land (A \Rightarrow B)$	$(A \land (A \Rightarrow B)) \Leftrightarrow B$
w	w	w	w	w
w	f	f	f	w
f	w	w	f	f
f	f	w	f	w

Wahrheitsverlauf der Aussage

d)

A	B	$A \land B$	$\neg(A \Leftrightarrow B)$	$(A \land B) \land (\neg(A \Leftrightarrow B))$
w	w	w	f	f
w	f	f	w	f
f	w	f	w	f
f	f	f	f	f

stets falsch

Wahrheitsverlauf

Aufgabe 3

a) $\{M, I, S, P\}$

b) Name: Michael Felten, $\{M, i, c, h, a, e, l, F, t, n\}$

c) $\{3, 1, 2, 0\}$

d) $\{a, u, g, e, n, o, h, r\}$

e) $\{b, l, e, i\} = \{l, e, i, b\}$

$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4! = 24$ Möglichkeiten

1 Mögl. für 4. Buchst.

2 Mögl. für 3. Buchst.

3 Mögl. für 2. Buchst.

4 Möglichkeiten für den 1. Buchstaben

Aufgabe 4

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$B = \{1, 2, 3, 4\}$

$C = \{2, 4\}$

$D = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} = A$

$A \setminus B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$

$B \setminus A = \emptyset$

$A \cap C = \{2, 4\} = C$

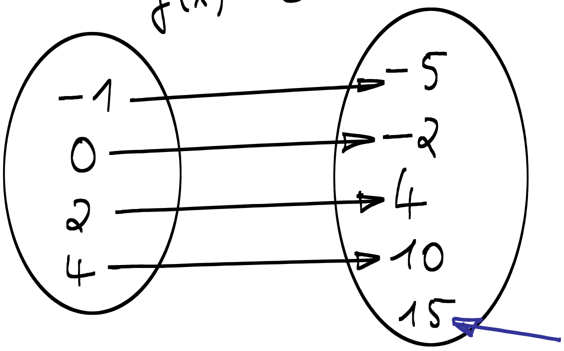
$A \cap D = \{2, 4, 6, 8\}$

$C \setminus D = \emptyset$

$D \setminus C = \{6, 8, 10\}$

Aufgabe 5

a) $f(x) = 3x - 2$

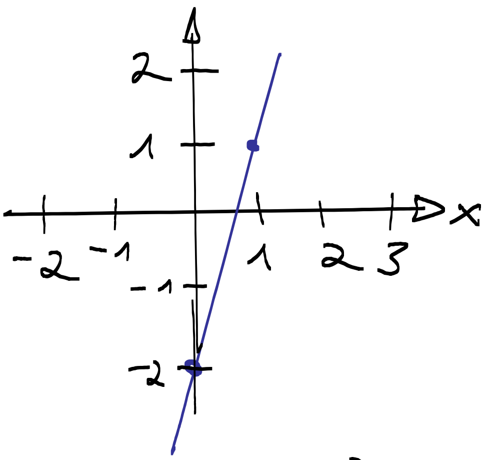


f ist injektiv

f ist nicht surjektiv

f ist nicht bijektiv

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 3x - 2$

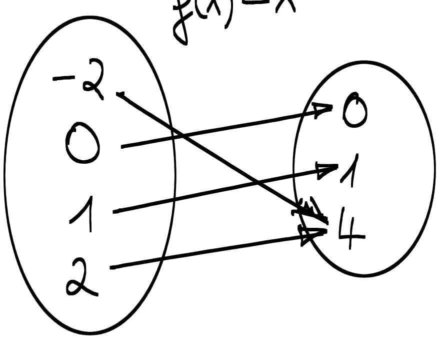


f ist injektiv

f ist surjektiv

f ist bijektiv

c) $f(x) = x^2$

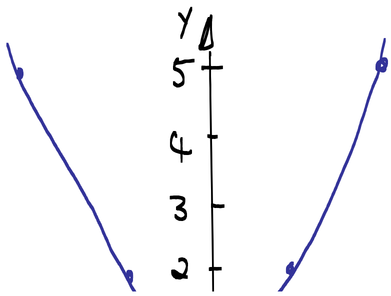


f ist nicht injektiv

f ist surjektiv

f ist nicht bijektiv

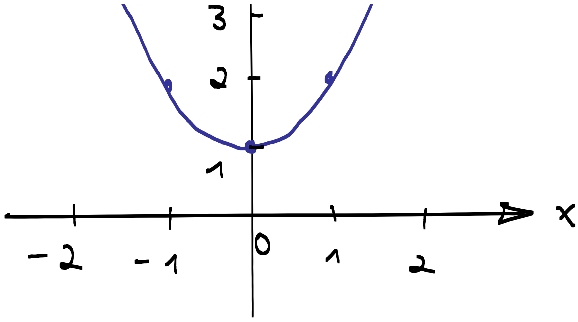
d) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 + 1$



f ist nicht injektiv

f ist nicht surjektiv

f ist nicht bijektiv



f ist nicht bijektiv

Aufgabe 6

a) $100x \in O(x^2)$ ist richtig. Es gilt

$$\underset{\substack{c>0 \\ x_0 \in \mathbb{R}}}{\exists} \ \underset{x \geq x_0}{\forall} \ 100x \leq c \cdot x^2$$

Wähle z.B. $c = 10$, $x_0 = 10$.

b) $x^5 \in O(x^3)$ ist falsch. Es gilt

$x^5 \notin O(x^3)$.

Beweis: Angenommen $x^5 \in O(x^3)$. Dann gäbe es ein $c > 0$ mit $x^5 \leq c x^3$. Hieraus würde folgen

$$\underbrace{\frac{x^5}{x^3}}_{x^2} \leq c \quad \text{bzw} \quad x^2 \leq c$$

für alle $x \geq x_0$ für ein $x_0 \in \mathbb{R}$.

Das ist falsch (Widerspruch). $\square$

c) $x \cdot \ln(x) \in O(x^2)$ ist richtig. Es gilt

$$\underset{\substack{c>0\\ x_0\in\mathbb{R}}}{\exists} \quad \underset{x\geq x_0}{\forall} \quad x\ln(x) \leq c\cdot x^2.$$

Wähle z.B. $c=1$ und $x_0=1$.

d) $3^x \in O(2^x)$ ist falsch. Es gilt

$$\frac{3^x}{2^x} = \left(\frac{3}{2}\right)^x = (1{,}5)^x \longrightarrow \infty \quad (x\to\infty).$$

Also kann es keine Konstanten $c>0$, $x_0\in\mathbb{R}$ geben mit

$$3^x \leq c\cdot 2^x \text{ für } x\geq x_0.$$

Aufgabe 7

Es gilt

$$O(f_8)\subset O(f_6)\subset O(f_1)\subset O(f_3)\subset O(f_2)\subset O(f_5)\subset O(f_7)\subset O(f_4)$$

bzw.

$$\underset{f_8}{\ln(\ln(x))} \leq \underset{f_6}{5\ln(x)} \leq \underset{f_1}{x\ln(x)} \leq \underset{f_3}{\overbrace{(\sqrt{x})^3}^{x^{\frac{3}{2}}}} \leq \underset{f_2}{x^2} \leq \underset{f_5}{10x^2+x^3} \leq \underset{f_7}{10x^3} \leq \underset{f_8}{x^x}.$$