Übungen zur Mathematik 2

Blatt 1

Aufgabe 1: Bestimmen Sie den Flächeninhalt, den die Funktion

$$f(x) = x^3 - 6x^2 - 4x + 24$$

mit der x-Achse im Bereich der beiden am weitesten außen gelegenen Schnittstellen einschließt.

Aufgabe 2: Gegeben sei die Funktion $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = xe^{-x}$.

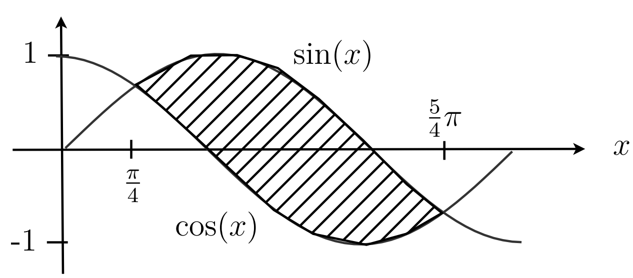
a) Stellen Sie den Verlauf der Funktion grafisch dar.

b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Flächenstücks, das von der Funktion f mit der x-Achse auf einem Intervall $[0, b]$ mit $b > 0$ eingeschlossen wird.

c) Was passiert für $b \to \infty$?

Aufgabe 3:

a) Berechnen Sie die zwischen der Sinus- und Kosinuskurve liegende Fläche im Bereich zweier aufeinanderfolgender Schnittpunkte.



b) Es sei a eine positive reelle Konstante. Skizzieren und berechnen Sie die Schnittfläche der beiden Funktionen

$$f(x) = 4a - \frac{x^2}{a} \quad \text{und} \quad g(x) = \frac{3}{a}(x-2a)^2.$$

Übungen zur Mathematik 2

Blatt 2

Aufgabe 1: Gegeben sei die Funktion $f\colon [0, 2\pi) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$.

a) Setzen Sie f zu einer 2π-periodischen Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fort. Stellen Sie den Verlauf der Funktion grafisch dar.

b) Berechnen Sie die Fourier-Koeffizienten von $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Tragen Sie die Werte in ein Koordinatensystem ein.

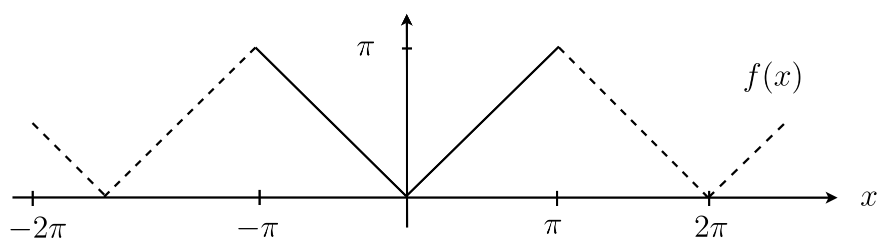
c) Schreiben Sie die zugehörige Fourier-Reihe auf.

d) Geben Sie die erste, zweite und dritte Näherungsfunktion explizit an und zeichnen Sie diese auf dem Intervall $[0, 2\pi]$.

Aufgabe 2: Bestimmen Sie die Fourier-Reihe der im Bild skizzierten periodischen Funktion, die im Periodenintervall $[-\pi, \pi]$ durch die Gleichung

$$f(x) = |x|$$

beschrieben wird. Zeichnen Sie die ersten drei Näherungsfunktionen der Fourier-Reihe.

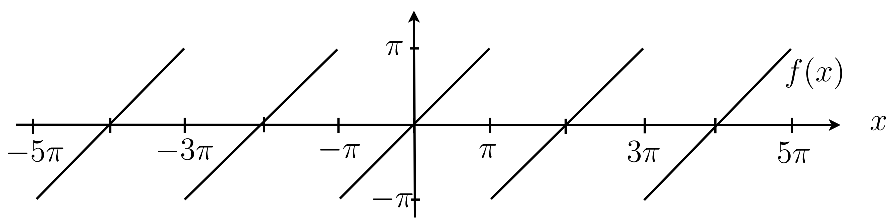


Hochschule der Medien Prof. Dr. Michael Felten

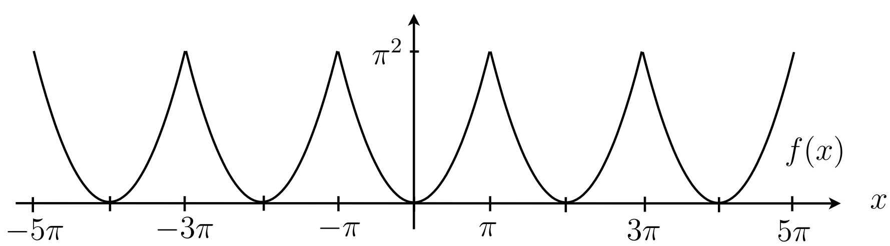
Übungen zur Mathematik 2

Blatt 3

Aufgabe 1: Wie lautet die Fourier-Entwicklung der im Bild dargestellen Sägezahnfunktion?



Aufgabe 2: Gegeben sei die im Bild dargestellte Funktion, die im Periodenintervall $[-\pi, \pi]$ durch die Gleichung $f(x) = x^2$ beschrieben wird.



Entwickeln Sie f in eine Fourier-Reihe.

Übungen zur Mathematik 2

Blatt 4

Aufgabe 1: Der Wert $I = \int_1^3 (-x^2+4x)\,dx$ soll näherungsweise bestimmt werden.

a) Summieren Sie die einzelnen Trapezflächen für die Zerlegung $x_0 = 1$, $x_1 = 1.4$, $x_2 = 1.8$, $x_3 = 2.2$, $x_4 = 2.6$ und $x_5 = 3.0$ auf.

b) Wenden Sie die summierte Trapezformel an.

c) Wie groß ist der absolute und relative Fehler der Integralnäherung aus b)?

Aufgabe 2: Wieviele Unterteilungen n des Intervalls sind in Aufgabe 1 notwendig, um einen Fehler kleiner als 10^{-3} für den Wert T_n der summierten Trapezformel zu erreichen? Wenden Sie folgende Fehlerabschätzung an:

$$|I - T_n| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|.$$

Aufgabe 3: Bestimmen Sie den Wert des Integrals

$$I = \int_0^\pi x\sin(x)\,dx$$

mittels summierter Trapezformel mit äquidistanten Zerlegungen von jeweils vier bzw. acht Teilintervallen. Geben Sie für alle berechneten Näherungswerte den tatsächlichen Fehler an, indem Sie I exakt berechnen (partielle Integration).

Übungen zur Mathematik 2

Blatt 5

Aufgabe 1: Es sei

$$I = \int_0^2 (x+1)\ln(x+1)\,dx.$$

a) Berechnen Sie den exakten Wert I mittels partieller Integration.

b) Berechnen Sie I näherungsweise mit Hilfe der Keplerschen Fassregel.

c) Vergleichen Sie den in b) berechneten Wert mit dem exakten Wert und bestimmen Sie den tatsächlichen Fehler.

Aufgabe 2: Bestimmen Sie den Wert des Integrals

$$I = \int_0^\pi x\sin(x)\,dx$$

mittels summierter Simpson-Formel mit äquidistanten Zerlegungen von jeweils vier bzw. acht Teilintervallen. Geben Sie für alle berechneten Näherungswerte den tatsächlichen Fehler an.

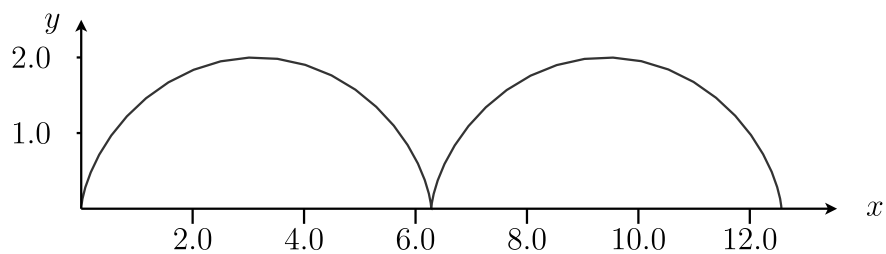
Übungen zur Mathematik 2

Blatt 6

Aufgabe 1: Der Weg des Ventils am Reifen beim Fahren ist die Zykloide. Für ein Rad mit Radius $r = 1$ und einem Ventil am äußeren Rand wird die Zykloide beschrieben durch die Kurve

$$\varphi\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}^2, \quad \varphi(t) = \begin{pmatrix} t - \sin(t) \\ 1 - \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Bogenlänge der Zykloiden von einer Nullstelle bis zu nächsten. Dies ist der Weg, den das Ventil während einer Umdrehung des Reifens zurücklegt.



Tipp für die Umformungen: $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$ und $1 - \cos(t) = 2\sin^2(\frac{t}{2})$.

Aufgabe 2: Berechnen Sie die Bogenlänge folgender Kurve.

$$\varphi\colon [-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}] \to \mathbb{R}^2, \qquad \varphi(t) = \begin{pmatrix} 3t^2 - 1 \\ 3t^3 - t \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3: Gegeben ist die Kettenlinie mit dem Verlauf

$$f(x) = c \cdot \cosh(\frac{x}{c}), \quad -c \le x \le c,$$

wobei $c > 0$ ist. Skizzieren Sie f, und bestimmen Sie die Bogenlänge der Kurve.
Tipp: Verwenden Sie die Beziehung $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$.

Aufgabe 4: Berechnen Sie die Bogenlänge der Funktion

$$f\colon [0,4] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{x} + 1.$$

Übungen zur Mathematik 2

Blatt 7

Aufgabe 1: Betrachten Sie die Bernstein-Polynome B_k^n vom Grad n für $k = 0, \ldots, n$ im Intervall $[0; 1]$.

a) Geben Sie die Definition für $B_k^n(t)$ an. Schreiben Sie alle Polynome auf für $n = 0, 1, 2, 3, 4$.

b) Skizzieren Sie $B_0^n(t)$ und $B_n^n(t)$ für $t \in [0; 1]$ und geben Sie $B_k^n(0)$ und $B_k^n(1)$ explizit an für $k = 0$ sowie $k = n$. Bestimmen Sie $B_k^n(0)$ und $B_k^n(1)$ für $0 < k < n$.

c) Wiederholen Sie den Beweis für

$$\sum_{k=0}^{n} B_k^n(t) = 1 \tag{1}$$

aus der Vorlesung, und schreiben Sie ihn explizit auf für $n = 2, 3, 4$.

d) Zeigen Sie, dass das k-te Bernstein-Polynom B_k^n vom Grad n im Intervall $[0, 1]$ genau ein Maximum besitzt, und zwar an der Stelle $t = \frac{k}{n}$.
Tipp: Differenzieren Sie $B_k^n(t)$ und setzen Sie die Ableitung gleich Null.

e) Skizzieren Sie den Verlauf aller Bernstein-Polynome vom Grad 2, 3, 4 und 5 für $t \in [0, 1]$. Überprüfen Sie anhand Ihrer Zeichnungen, ob die Bedingung (1) für alle $t \in [0, 1]$ erfüllt ist. Korrigieren Sie ggfs Ihre Zeichnungen.

f) Zeichnen Sie die absoluten Maxima in die Grafiken unter e) ein.

g) Beweisen Sie, dass $(1 - t) \cdot B_k^{n-1}(t) + t \cdot B_{k-1}^{n-1}(t) = B_k^n(t)$ gilt.

Übungen zur Mathematik 2

Blatt 8

Aufgabe 1: Stellen Sie die unten angegebenen Kontrollpunkte und deren Kontrollpolygone in einem Koordinatensystem grafisch dar. Skizzieren Sie den Verlauf der zugehörigen Bezier-Kurven $\varphi(t)$ für $t \in [0,1]$. Berechnen Sie anschließend $\varphi(\frac{1}{2})$ und $\varphi(\frac{1}{3})$ mit Hilfe des Algorithmus von de Casteljau sowohl rechnerisch als auch zeichnerisch.

a) $p_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $p_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $p_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$,

b) $p_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $p_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $p_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$,

Aufgabe 2: Gehen Sie entsprechend wie in Aufgabe 1 vor für die folgenden Punkte.

a) $p_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $p_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $p_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $p_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$,

b) $p_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $p_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $p_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $p_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Hochschule der Medien

Prof. Dr. Michael Felten

Übungen zur Mathematik 2

Blatt 9

Aufgabe 1: Berechnen Sie

$$\sqrt[5]{37} = 2.058924136478517\ldots$$

näherungsweise.

a) Wenden Sie das Newton-Verfahren auf die Funktion $f(x) = x^5 - 37$ an. Führen Sie mit einem Taschenrechner zwei Iterationen durch. Wählen Sie als Startwert $x_0 = 2$.

b) Wieviele weitere Iterationsschritte sind etwa erforderlich, um 16 exakte Nachkommastellen zu berechnen?

Aufgabe 2: Betrachten Sie die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = e^x + x - 2.$$

Diese Funktion hat im Intervall $[0, 1]$ eine Nullstelle. Berechnen Sie diese näherungsweise mit dem Newton-Verfahren unter Benutzung eines Taschenrechners. Verwenden Sie möglichst viele Nachkommastellen, und wählen Sie als Startwert $x_0 = 1$. Wieviele Iterationen sind notwendig, um 16 Nachkommastellen exakt zu berechnen?

Aufgabe 3: Gegeben sei die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = x + \frac{1}{2}(3 - e^x).$$

Bestimmen Sie mit dem Newton-Verfahren näherungsweise die beiden Nullstellen, die etwa bei 1.5 und -1.0 liegen. Verwenden Sie dazu einen Taschenrechner und berechnen Sie die Nullstellen auf 9 Nachkommastellen genau.

Hochschule der Medien Prof. Dr. Michael Felten

Übungen zur Mathematik 2

Blatt 10

Aufgabe 1: Berechnen Sie

$$\sqrt[5]{37} = 2.058924136478517\ldots$$

näherungsweise mit dem Sekanten-Verfahren.

a) Wenden Sie das Sekanten-Verfahren auf die Funktion $f(x) = x^5 - 37$ an. Berechnen Sie mit einem Taschenrechner die iterierten Werte x_2 bis x_6. Wählen Sie als Startwerte $x_0 = 2$ und $x_1 = 3$.

b) Wieviele weitere Iterationsschritte sind etwa erforderlich, um 16 exakte Nachkommastellen zu berechnen?

c) Vergleichen Sie die berechneten Näherungen mit denen des Newton-Verfahrens.

Aufgabe 2: Betrachten Sie die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = e^x + x - 2.$$

Diese Funktion hat im Intervall $[0, 1]$ eine Nullstelle. Berechnen Sie diese näherungsweise mit dem Sekanten-Verfahren unter Benutzung eines Taschenrechners.

a) Verwenden Sie möglichst viele Nachkommastellen, und wählen Sie als Startwerte $x_0 = 0$ und $x_1 = 1$. Wieviele Iterationen sind notwendig, um etwa 16 Nachkommastellen exakt zu berechnen?

b) Vergleichen Sie die berechneten Näherungen mit denen des Newton-Verfahrens.

Aufgabe 3: Gegeben sei die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = x + \frac{1}{2}(3 - e^x).$$

Bestimmen Sie mit dem Sekanten-Verfahren näherungsweise die beiden Nullstellen, die etwa bei 1.5 und -1.0 liegen.

a) Verwenden Sie dazu einen Taschenrechner und berechnen Sie die Nullstellen auf 9 Nachkommastellen genau.

b) Vergleichen Sie die berechneten Näherungen mit denen des Newton-Verfahrens.