

Anwendungen

$f'(x)$ = Steigung der Tangente

Monotonie

Eine Funktion f heißt auf dem Intervall $[a, b]$

monoton wachsend, falls $f(x_1) \leq f(x_2)$

streng monoton wachsend falls $f(x_1) < f(x_2)$

monoton fallend, falls $f(x_1) \geq f(x_2)$

streng monoton fallend, falls $f(x_1) > f(x_2)$

für alle $x_1, x_2 \in [a, b]$ mit $x_1 < x_2$.

Sei f eine differenzierbare Funktion.

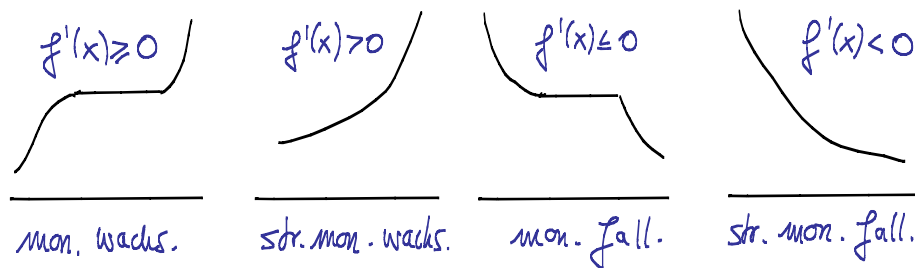
Dann gilt:

f auf $[a, b]$ monoton wachsend $\Leftrightarrow f'(x) \geq 0 \forall x \in [a, b]$

f auf $[a, b]$ streng mon. wachsend $\Leftrightarrow f'(x) > 0 \forall x \in [a, b]$

f auf $[a, b]$ monoton fallend $\Leftrightarrow f'(x) \leq 0 \forall x \in [a, b]$

f auf $[a, b]$ streng mon. fallend $\Leftrightarrow f'(x) < 0 \forall x \in [a, b]$



Beispiel:

$$f(x) = x^2, f'(x) = 2x$$

$f'(x) > 0 \forall x \in (0, \infty)$, d.h. f auf $(0, \infty)$ streng mon. wachsend

$f'(x) < 0 \forall x \in (-\infty, 0)$, d.h. f auf $(-\infty, 0)$ streng mon. fallend

Maxima, Minima und Wendepunkte

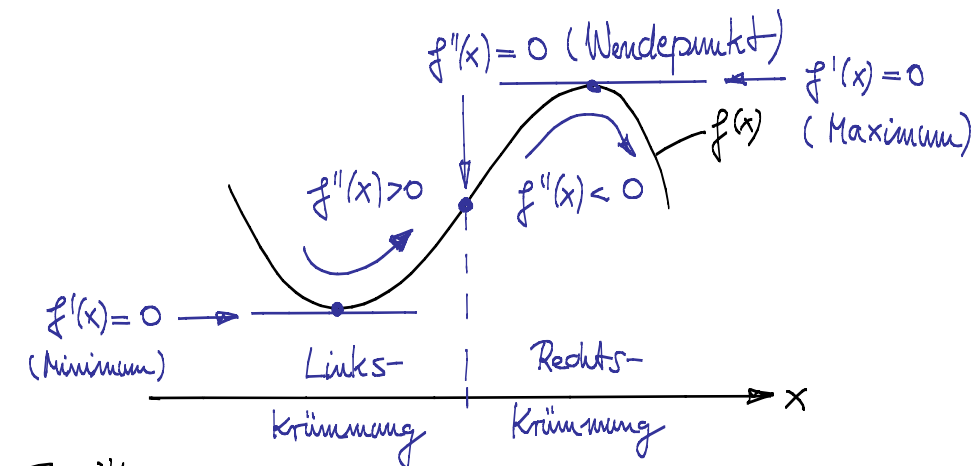
Sei f eine zweimal differenzierbare Funktion, d.h.

$f'(x)$ und $f''(x)$ existieren.

$f''(x)$ = Maß für die Krümmung.

$f''(x) > 0 \Rightarrow$ Linkskrümmung ($f'(x)$ str. mon. wachsend)

$f''(x) < 0 \Rightarrow$ Rechtskrümmung ($f'(x)$ str. mon. fallend)



Es gilt:

f hat in x_0 ein (lokales) Maximum bzw. Minimum, wenn

1.) $f'(x_0) = 0$,

2.) $f''(x_0) < 0$ bzw. $f''(x_0) > 0$.

Falls $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$, dann hat f in x_0 einen Wendepunkt.

Beispiel:

$$f(x) = 3x^5 - 20x^3$$

$$f'(x) = 15x^4 - 60x^2 \quad \leftarrow \text{Ableitung gleich Null setzen}$$

$$15x^4 - 60x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 15x^2(x^2 - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow 15x^2(x-2)(x+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \underline{x=0 \vee x=2 \vee x=-2}$$

drei Nullstellen der Ableitung
Kandidaten für Minima, Maxima

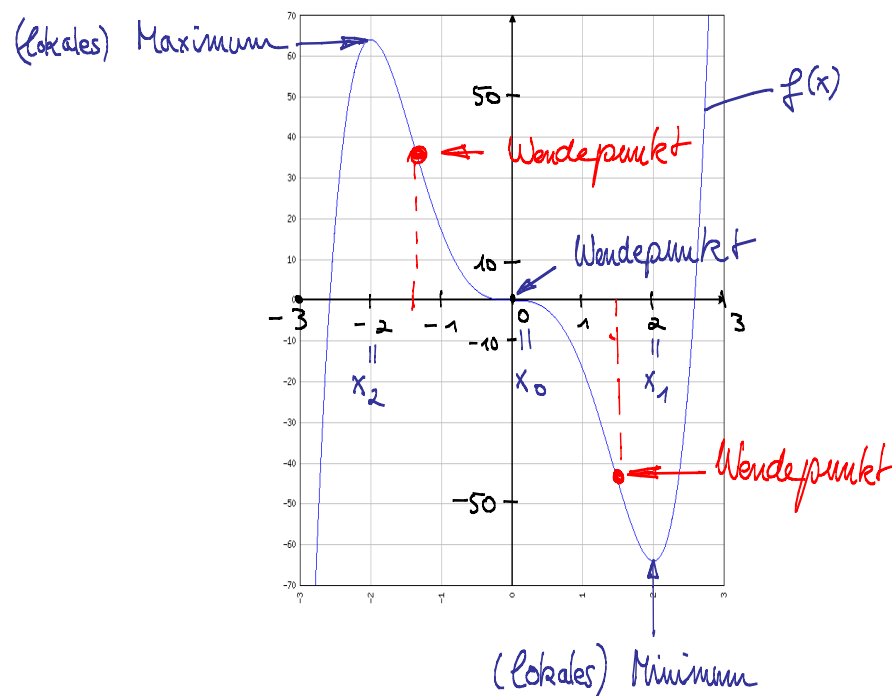
$$f''(x) = 60x^3 - 120x$$

$$f'''(x) = 180x^2 - 120$$

$$\left. \begin{array}{l} f''(0) = 0 \\ f'''(0) = -120 \neq 0 \end{array} \right\} f \text{ hat in } x_0 = 0 \text{ einen Wendepunkt}$$

$$f''(2) = 240 > 0 \Rightarrow f \text{ hat in } x_1 = 2 \text{ ein Minimum}$$

$$f''(-2) = -240 < 0 \Rightarrow f \text{ hat in } x_2 = -2 \text{ ein Maximum}$$



Hat f weitere Wendepunkte?

$$f''(x) = 60x^3 - 120x = 0$$

$$\Leftrightarrow (60x^2 - 120) \cdot x = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2) \cdot x = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x=0}_{\substack{1, 4, 14 \dots \\ \parallel}} \vee x = -\sqrt{2} \vee x = \sqrt{2}$$

bereits als Wendepunkt erkannt

$$f'''(\sqrt{2}) = 180 \cdot 2 - 120 = 240 \neq 0$$

$$f'''(-\sqrt{2}) = 180 \cdot 2 - 120 = 240 \neq 0$$

$\Rightarrow f$ hat in $-\sqrt{2}$ und $\sqrt{2}$ zwei weitere Wendepunkte.