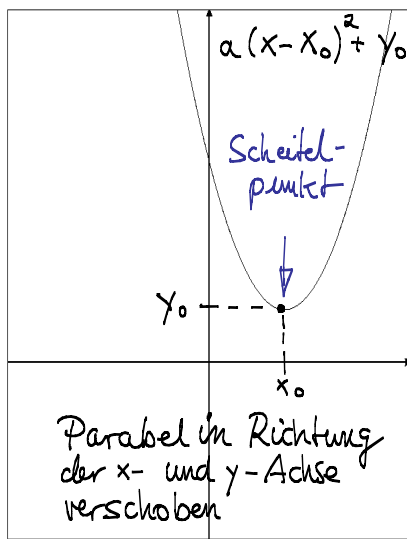
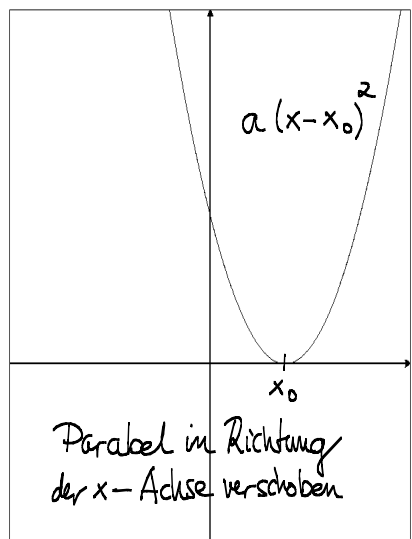
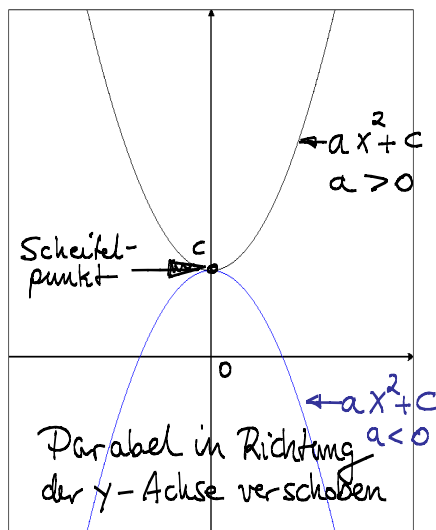
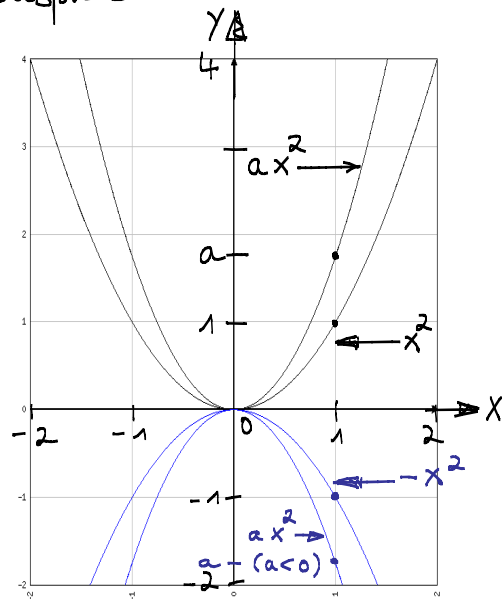


Quadratische Funktionen

Definition: Eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ der Form $f(x) = ax^2 + bx + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$, heißt quadratische Funktion.

Beispiele:



Fall $a > 0$: Parabel ist nach oben geöffnet
 Fall $a < 0$: " " " " unten

Scheitelpunktsform: Eine quadratische Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$

läßt sich durch quadratische Ergänzung auf Scheitelpunktsform $f(x) = a(x - x_0)^2 + y_0$ bringen (Scheitelpunkt (x_0, y_0)).

Beispiel:

$$f(x) = 2x^2 - 8x + 6 \quad (\text{Parabel nach oben geöffnet})$$

$$= 2(x^2 - 4x) + 6$$

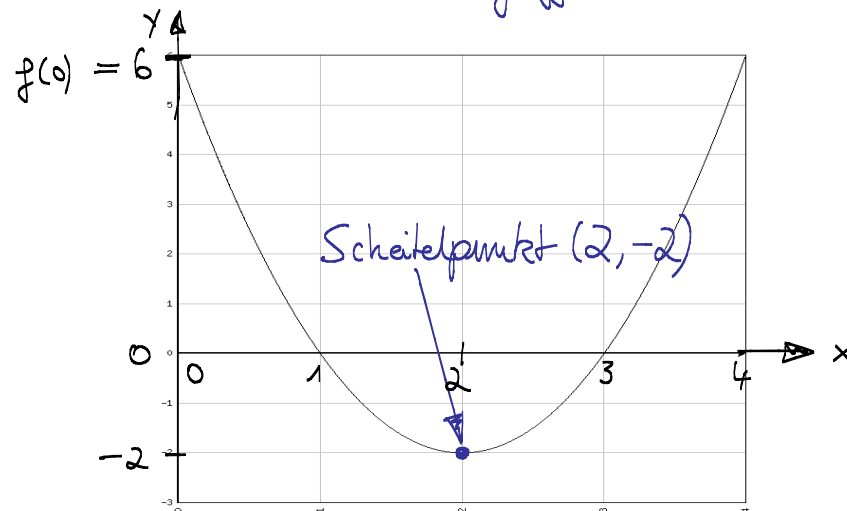
$$= 2(x^2 - 4x + \underbrace{2^2}_{\text{quadratische Ergänzung}} - 2^2) + 6$$

$$= 2(x - 2)^2 - 4 + 6$$

$$= 2(x - 2)^2 - 2 \quad \text{Scheitelpunktsform}$$

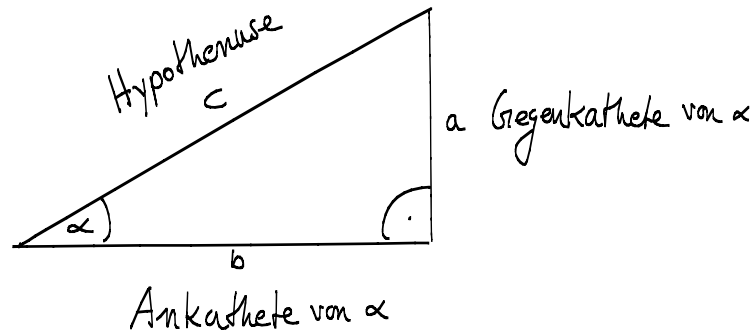
↑ Verschiebung nach rechts
 ↑ Verschiebung nach unten

Parabel ist nach oben geöffnet



Trigonometrische Funktionen

Rechtwinkliges Dreieck:



Seitenverhältnisse: hängen nur von α ab
aber nicht von der Größe des Dreiecks!

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{a}{c}$$

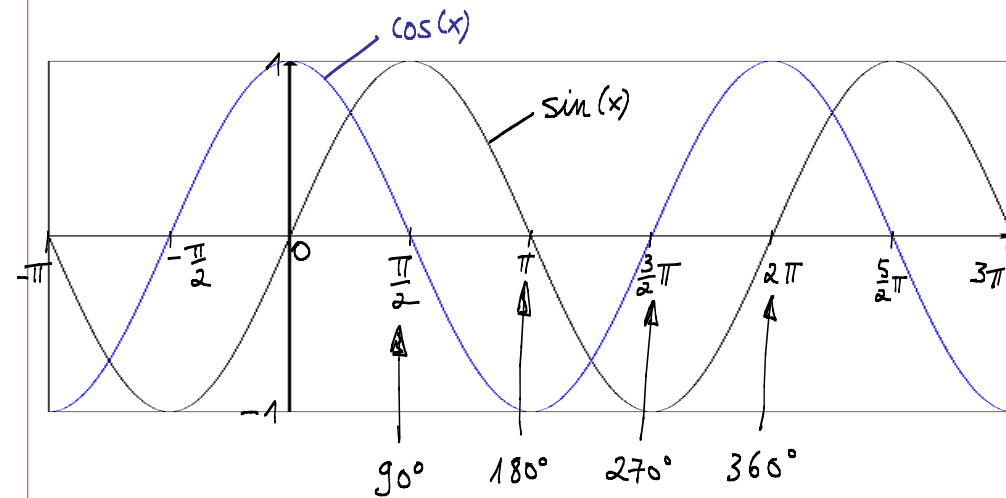
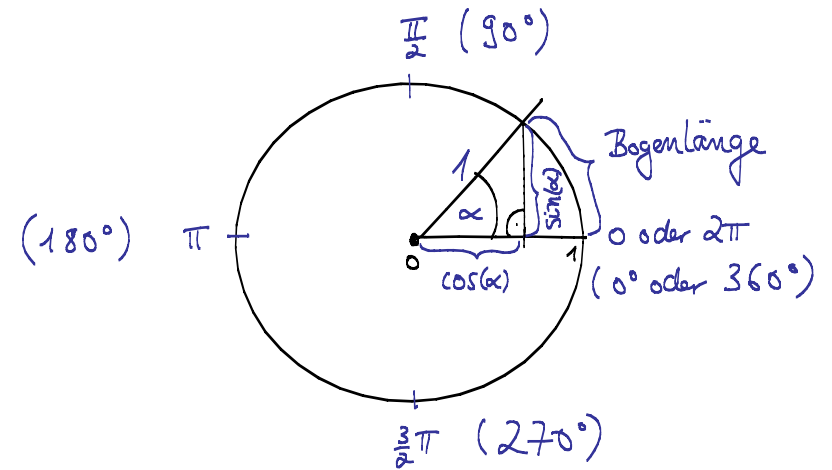
$$\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{b}{c}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{a}{b} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

$$\cot(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}} = \frac{b}{a} = \frac{1}{\tan(\alpha)} = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$$

Winkel α : Gradmaß oder Bogenmaß

Bogenmaß von α = Länge des zugehörigen Bogens auf dem Einheitskreis (Radius = 1)



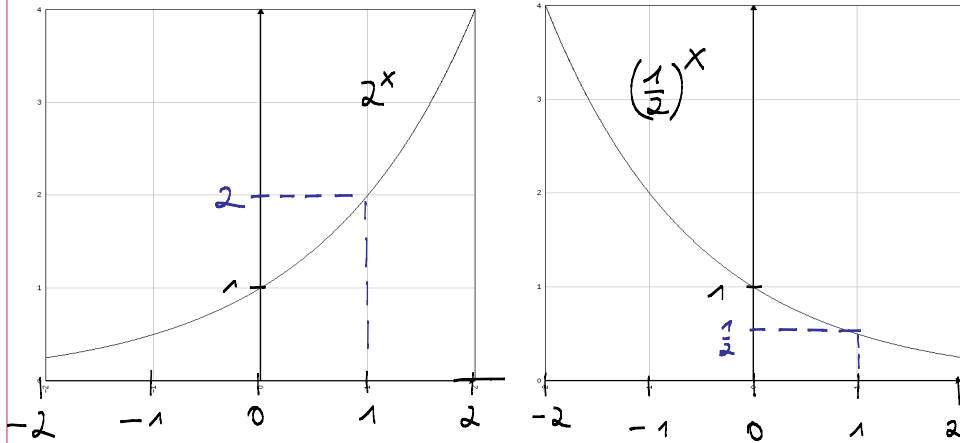
Es gilt:

- 1.) $\sin(x+2\pi) = \sin(x)$, $\cos(x+2\pi) = \cos(x)$ 2π -periodische Funktionen
- 2.) $\sin(x+\frac{\pi}{2}) = \cos(x)$
- 3.) $\sin(0) = \sin(\pm\pi) = \sin(\pm2\pi) = \dots = 0$ Nullstellen: $k \cdot \pi$, $k \in \mathbb{Z}$
- 4.) $\cos(\pm\frac{\pi}{2}) = \cos(\pm\frac{3}{2}\pi) = \cos(\pm\frac{5}{2}\pi) = \dots = 0$ Nullstellen: $(2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$
- 5.) $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

Exponentialfunktionen

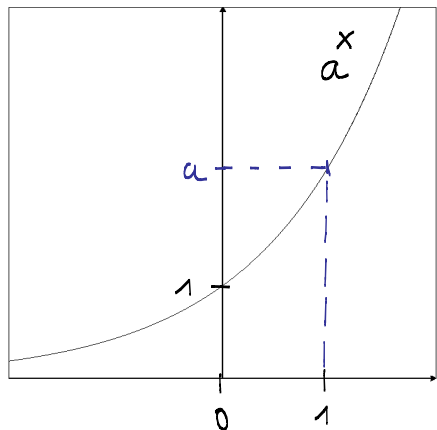
Definition: Eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ der Form $f(x) = a^x$ mit $a > 0$ und $a \neq 1$ heißt Exponentialfunktion.

Beispiele:

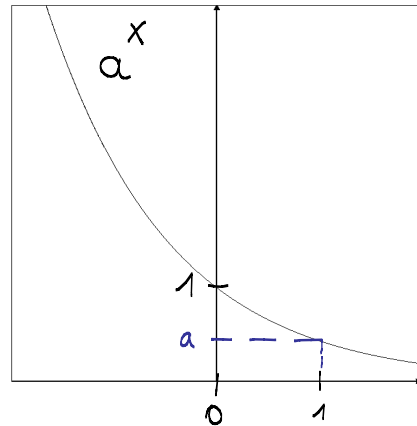


Zwei Fälle:

$$\underline{a > 1}$$



$$\underline{0 < a < 1}$$



→ Applet Exponentialfunktionen (Homepage)

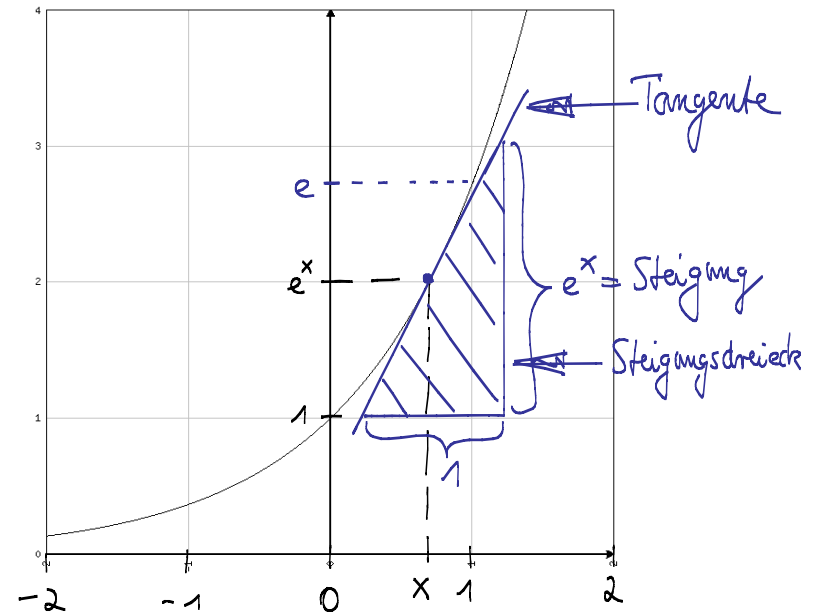
Eulersche Zahl

Die Exponentialfunktion a^x hat in $x=0$ eine Tangente mit der Steigung 1 g.d.w. die Basis a die Zahl

$$e = 2,718281828459\dots \text{ (Eulersche Zahl)}$$

ist. e^x ist eine der wichtigsten Funktionen der Mathematik.

Bemerkenswerte Eigenschaft von e^x : Die Steigung stimmt in jedem Punkt mit dem Funktionswert überein.



In der Sprache der Differentialrechnung heißt das:

$$\underline{(e^x)' = e^x}$$

Ableitung = Steigung der Tangente an e^x

Einzig Funktion mit dieser Eigenschaft.