



Probeklausur zur Mathematik 2

Schreiben Sie mit einem **weichen Bleistift** und nehmen Sie ggfs Korrekturen mit einem **Radiergummi** vor. Lösen Sie die Multiple-Choice-Aufgaben durch **Schwärzen** der Kästchen (bitte keine Kreuze). Bei **Freitextaufgaben** schreiben Sie direkt in die vorgegebenen Rahmen, markieren Sie keine Kästchen direkt unter den Rahmen!

Multiple-Choice-Aufgaben, die mit dem Zeichen ♣ gekennzeichnet sind, können mehrere korrekte Antworten haben. Andere Aufgaben haben genau eine korrekte Antwort. Falsche Antworten ergeben Minuspunkte, jede Aufgabe wird mit mindestens Null Punkten abgeschlossen.

Bei vielen Multiple-Choice-Aufgaben sind vorher Rechnungen erforderlich. Führen Sie diese nicht auf der Klausur sondern auf einem **Extrablatt** durch, das Sie **nicht mit abgeben**.

Taschenrechner sind zugelassen, ansonsten **keine Hilfsmittel**. Sie haben **60 Minuten** Zeit zur Bearbeitung. Viel Erfolg!

Name, Vorname, Matrikelnr.

Test, Mark

<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0
<input checked="" type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1
<input type="checkbox"/> 2	<input checked="" type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2
<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input checked="" type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3
<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input checked="" type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4
<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input checked="" type="checkbox"/> 5
<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6
<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7
<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8
<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9

Aufgabe 1

Berechnen Sie $\int_1^3 (-x^2 + 4x) dx$ näherungsweise mit der *Trapezformel*:

$$\int_1^3 (-x^2 + 4x) dx \approx \cancel{(3-1)} \frac{3+3}{2} = 6$$

Berechnen Sie den absoluten und den relativen Fehler:

$$\begin{aligned} \text{Exakter Wert: } \int_1^3 (-x^2 + 4x) dx &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 \right]_1^3 \\ &= -9 + 18 - \left(-\frac{1}{3} + 2 \right) = 7\frac{1}{3} = \frac{22}{3} \end{aligned}$$

$$\text{Absoluter Fehler: } 6 - 7\frac{1}{3} = -\frac{4}{3} \text{ oder } 7\frac{1}{3} - 6 = \frac{4}{3}$$

$$\text{Relativer " : } \frac{4/3}{22/3} = \frac{4}{22} = \frac{2}{11} = 0,18$$

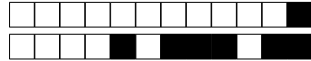
- 0 1 2 3 4 5 6 7 8

Aufgabe 2 Berechnen Sie $\int_1^5 (-x^2 + 6x) dx$ näherungsweise mit der Trapezformel. Das Ergebnis ist

- 15 23 20

Aufgabe 3 Berechnen Sie $\int_2^{15} 2(x^3 + 10x) dx$ näherungsweise mit der Trapezformel. Das Ergebnis ist

- 46449 48139 46189

**Aufgabe 4**

Berechnen Sie $\int_1^5 (-x^2 + 6x) dx$ näherungsweise mit der summierten Trapezformel mit äquidistanter Zerlegung in vier Teilintervalle:

$$\int_1^5 (-x^2 + 6x) dx \approx \frac{5-1}{4} \left(\frac{f(1)}{2} + f(2) + f(3) + f(4) + \frac{f(5)}{2} \right)$$

$$= \frac{5}{2} + 8 + 9 + 8 + \frac{5}{2} = \underline{\underline{30}}$$

Berechnen Sie den absoluten und relativen Fehler:

$$\int_1^5 (-x^2 + 6x) dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 \right]_1^5 = -\frac{125}{3} + 75 - \left(-\frac{1}{3} + 3 \right) = 30\frac{2}{3} = \underline{\underline{30,6}}$$

Absoluter Fehler: $0,6$

Relativer Fehler: $\frac{0,6}{30,6} = 0,0217\dots$
 $\hat{=} 2,17\%$

- 0 1 2 3 4 5 6 7 8

Aufgabe 5 Berechnen Sie $\int_2^{15} 2(x^3 + 10x) dx$ näherungsweise durch die summierte Trapezformel mit einer äquidistanter Zerlegung in zwei Teilintervalle. Das Ergebnis ist

- 32216.8432 32183.125 32200.2665

Aufgabe 6 Betrachten Sie die periodische Fortsetzung von $f(x) = \begin{cases} \pi + x, & -\pi \leq x \leq 0 \\ \pi - x, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$. Stellen Sie den Verlauf grafisch dar (Extrablatt). Ist f eine gerade oder ungerade Funktion?

- ungerade gerade

Aufgabe 7 ♣ Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die periodische Funktion mit $f(x) = \begin{cases} \pi + x, & -\pi \leq x \leq 0 \\ \pi - x, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$. Berechnen Sie alle Fourier-Koeffizienten von f . Welche Antworten sind richtig?

- | | | |
|--|---|--|
| <input type="checkbox"/> $a_1 = 4\pi$ | <input type="checkbox"/> $a_2 = \pi$ | <input type="checkbox"/> $a_k = 0, k$ ungerade |
| <input checked="" type="checkbox"/> $a_3 = \frac{4}{9\pi}$ | <input checked="" type="checkbox"/> $b_k = 0, k \in \mathbb{N}$ | <input type="checkbox"/> $a_3 = 4\pi$ |
| <input checked="" type="checkbox"/> $a_k = 0, k$ gerade | <input checked="" type="checkbox"/> $a_0 = \pi$ | <input type="checkbox"/> $b_k = \frac{4}{k^2\pi}, k$ ungerade |
| <input type="checkbox"/> $b_1 = \frac{4}{\pi}$ | <input checked="" type="checkbox"/> $b_5 = 0$ | <input checked="" type="checkbox"/> $a_2 = 0$ |
| <input type="checkbox"/> $a_0 = \frac{1}{\pi}$ | <input type="checkbox"/> $a_k = 0, k \in \mathbb{N}_0$ | <input checked="" type="checkbox"/> $a_k = \frac{4}{k^2\pi}, k$ ungerade |



Aufgabe 8

Wenden Sie das Newton-Verfahren auf das Nullstellenproblem $f(x) = x^5 - 37 = 0$. Zeigen Sie, dass sich die Iterationsvorschrift des Newton-Verfahrens umformen lässt in $x_{n+1} = \frac{4x_n}{5} + \frac{37}{5x_n^4}$, $n = 0, 1, \dots$:

$$\begin{aligned}
 x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^5 - 37}{5x_n^4} = x_n - \frac{x_n}{5} + \frac{37}{5x_n^4} \\
 &= \frac{4x_n}{5} + \frac{37}{5x_n^4}
 \end{aligned}$$

Führen Sie zwei Iterationsschritte mit dem Startwert $x_0 = 2$ durch (sechs Nachkommastellen).

$$x_1 = 2,0625 \qquad x_2 = \underline{2,058936 \dots}$$

Gegen welche Nullstelle konvergiert die Iteration und wieviele Nachkommastellen sind in der zweiten Iteration exakt? Wieviele weitere Iterationsschritte sind etwa erforderlich, um 16 exakte Nachkommastellen zu berechnen? Begründen Sie Ihre Antwort.

$x^5 - 37 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[5]{37}$
 $x_n \rightarrow \sqrt[5]{37} = 2,058924 \dots$
 x_2 hat 4 exakte Nachkommastellen
 Pro Iterationsschritt etwa Verdopplung der Stellen.
 3. Schritt: etwa 8 exakte Nachkommastellen
 4. " " 16 " "
 Also etwa zwei weitere Iterationsschritte erforderlich.

- 0 1 2 3 4 5 6 7 8

Aufgabe 9 Berechnen Sie die Bogenlänge der Kurve $\varphi: [-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi(t) = \begin{pmatrix} 3t^2-1 \\ 3t^3-t \end{pmatrix}$. Die Bogenlänge ist

- $4\sqrt{3}$ $\frac{4}{\sqrt{3}}$ $\sqrt{12}$ $\frac{\sqrt{3}}{4}$

Aufgabe 10 Berechnen Sie die Bogenlänge der Kurve $\varphi: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\varphi(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{pmatrix}$. Tipp für die Umformungen: $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$. Die Bogenlänge ist

- $2\pi\sqrt{2}$ $\pi\sqrt{3}$ $\pi\sqrt{2}$ $2\pi\sqrt{3}$

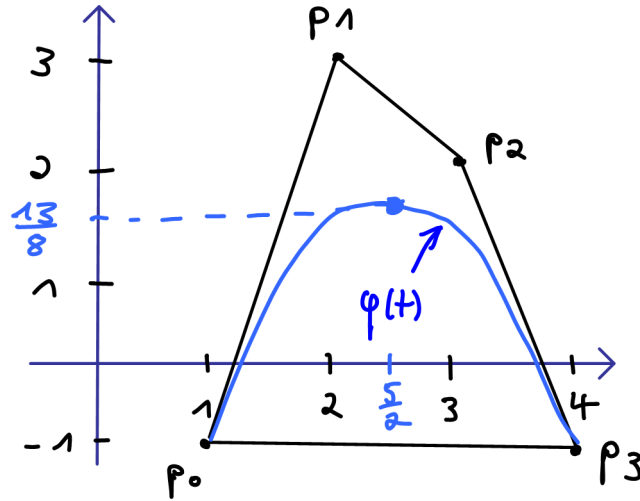
Aufgabe 11 Eine Kette wird an zwei $4m$ auseinander liegenden Punkten gleicher Höhe aufgehängt und besitzt dann den Funktionsverlauf von $f(x) = 2 \cosh(\frac{x}{2})$ für $-2 \leq x \leq 2$. Tipp für die Umformungen: $\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$. Wie lang ist die Kette?

- $5,17 \dots m$ $3,81 \dots m$ $6,41 \dots m$ $4,70 \dots m$

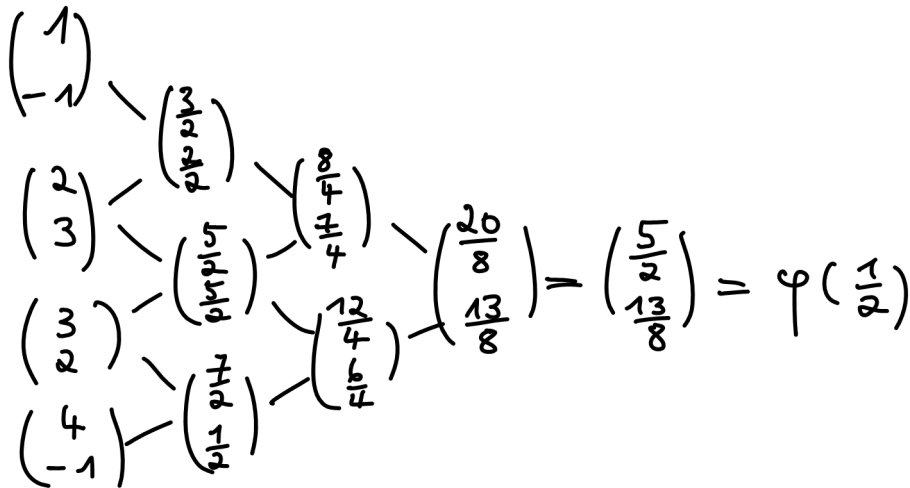


Aufgabe 12

Gegeben seien die folgenden Punkte des \mathbb{R}^2 : $p_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $p_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $p_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $p_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$.
 Skizzieren Sie das Kontrollpolygon und die Bezierkurve φ :



Berechnen Sie $\varphi(\frac{1}{2})$ mit Hilfe des Algorithmus von de Casteljau:



Führen Sie die Berechnungen von $\varphi(\frac{1}{2})$ grafisch durch:

