# Übungen zur Mathematik
# Lösungen Blatt 8

## Aufgabe 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4+1 \\ 2+6+1 \\ 4+4+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+0+1 \\ -2+0+1 \\ 4+0-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

## Aufgabe 2

a) $A\cdot A = \begin{pmatrix} 13 & 34 & 18 \\ 8 & 32 & 17 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

$A\cdot B = \begin{pmatrix} -13 & 19 & 15 \\ -21 & 10 & 12 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$B\cdot A = \begin{pmatrix} 8 & 32 & 17 \\ -5 & -3 & -1 \\ -12 & -13 & -8 \end{pmatrix}$

$A\cdot B \neq B\cdot A$

$B\cdot B = \begin{pmatrix} -21 & 10 & 12 \\ -4 & -9 & -6 \\ -16 & -20 & -3 \end{pmatrix}$

b) $A\cdot A$ und $B\cdot B$ existieren nicht.

$A\cdot B = \begin{pmatrix} 13 & 18 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

$B\cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 10 & 12 & 29 \\ 1 & 4 & 3 & 8 \\ 0 & -4 & 0 & -2 \\ 1 & 8 & 3 & 10 \end{pmatrix}$

$A\cdot B$ und $B\cdot A$ sind von verschiedenem Typ und können somit nicht gleich sein

# Aufgabe 3

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \mid \cdot 2 \quad \mid \cdot 3 \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} -1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & -4 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \\ \mid \cdot (-2) \\ \\ \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

3 Nicht-Null-Zeilen

$\Rightarrow$ Matrix $A$ ist regulär, $\operatorname{rang}(A) = 3$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \mid \cdot (-1) \quad \mid \cdot (-1) \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \\ \mid \cdot (-1) \quad \mid \cdot (-2) \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$
\begin{array}{cccc}
1 & -1 & -2 & 3 \\
0 & 1 & 1 & -2 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 2
\end{array}
\quad 3 \text{ Nicht-Null-Zeilen}
$$

$\Rightarrow$ Matrix B ist singulär

$\operatorname{rang}(B) = 3$ (Anzahl der Nicht-Null-Zeilen)

$$
C = \left\{
\begin{array}{cccc}
1 & 0 & 2 & 0 \\
4 & -1 & -1 & 6 \\
-1 & 2 & 2 & 2 \\
3 & -1 & 0 & 3
\end{array}
\right.
\quad | \cdot (-4) \quad | \cdot 1 \quad | \cdot (-3)
$$

$$
\begin{array}{cccc}
1 & 0 & 2 & 0 \\
0 & -1 & -9 & 6 \\
0 & 2 & 4 & 2 \\
0 & -1 & -6 & 3
\end{array}
\quad | \cdot 2 \quad | \cdot (-1)
$$

$$
\begin{array}{cccc}
1 & 0 & 2 & 0 \\
0 & -1 & -9 & 6 \\
0 & 0 & -14 & 14 \\
0 & 0 & 3 & -3
\end{array}
\quad
\begin{array}{l}
\\
\\
| : 14 \\
\\
\end{array}
$$

$$\begin{array}{cccc|l} 1 & 0 & 2 & 0 & \\ 0 & -1 & -9 & 6 & \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \mid \cdot 1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & \leftarrow \\ \hline 1 & 0 & 2 & 0 & \\ 0 & -1 & -9 & 6 & \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array}$$

3 Nicht-Null-Zeilen

$\Rightarrow$ Matrix C ist singulär

$$\text{rang}(C) = 3$$

## Aufgabe 4

$$A = \left\{\begin{array}{ccc|ccc|l} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \mid \cdot (-2) \\ 2 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & \leftarrow \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{ccc|ccc|l} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & -4 & -2 & 1 & 0 & \mid \cdot (-3) \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & \leftarrow \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & -4 & -2 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 13 & 6 & -3 & 1 & \mid : 13 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{6}{13} & -\frac{3}{13} & \frac{1}{13} \end{array}\right. \quad |\cdot 4 \quad |\cdot(-1)$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{13} & \frac{3}{13} & -\frac{1}{13} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{13} & \frac{1}{13} & \frac{4}{13} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{6}{13} & -\frac{3}{13} & \frac{1}{13} \end{array}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{A^{-1}}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{13} & \frac{3}{13} & -\frac{1}{13} \\ -\frac{2}{13} & \frac{1}{13} & \frac{4}{13} \\ \frac{6}{13} & -\frac{3}{13} & \frac{1}{13} \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \\ 6 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Probe:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \\ 6 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \\ 6 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 13 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & 13 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{3\times 3\text{-Einheitsmatrix}} \checkmark$$