

Übungen zur Mathematik

Lösungen Blatt 7

Aufgabe 1

a) Gesucht: x_1 = Anzahl der Tage, die der Student 1 alleine braucht

x_2 = Anzahl der Tage, die der Student 2 alleine braucht

Student 1 schafft pro Tag $\frac{1}{x_1}$ der Arbeit.
" 2 " " " $\frac{1}{x_2}$ " " "

Zusammen schaffen beide pro Tag $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ der Arbeit.

Laut Aufgabentext ergeben sich folgende Gleichungen:

$$12 \cdot \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \right) = 1$$

$$2 \cdot \frac{1}{x_1} + 3 \cdot \frac{1}{x_2} = \frac{1}{5}$$

Substitution $y_1 = \frac{1}{x_1}$ und $y_2 = \frac{1}{x_2}$ führt auf das lineare GLS

$$12 y_1 + 12 y_2 = 1$$

$$\underline{2 y_1 + 3 y_2 = \frac{1}{5}}$$

$$2y_1 + 3y_2 = \frac{1}{5} \quad | \cdot (-6)$$

$$\underline{12y_1 + 12y_2 = 1} \quad \leftarrow$$

$$2y_1 + 3y_2 = \frac{1}{5} \quad \Rightarrow \underline{y_1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5} - \frac{3}{30} \right) = \underline{\underline{\frac{1}{20}}}$$

$$-6y_2 = -\frac{1}{5} \Rightarrow \underline{\underline{y_2 = \frac{1}{30}}}$$

$$\Rightarrow x_1 = 20 \text{ und } x_2 = 30$$

Antwort: Student 1 alleine braucht 20 Tage.
" 2 " " 30 "

$$b) \quad x_1 + x_2 = 1000 \quad | \cdot (-2)$$

$$\underline{2x_1 + 3x_2 = 2222} \quad \leftarrow$$

$$x_1 + x_2 = 1000 \quad \Rightarrow \underline{\underline{x_1 = 778}}$$

$$\underline{\underline{x_2 = 222}}$$

Aufgabe 2

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & 6 \\ 3 & -2 & -4 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{array} \begin{array}{l} | \cdot (-\frac{3}{2}) \quad | \cdot (-1) \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 6 & -5 \end{array} \Rightarrow z = -\frac{5}{6}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2} \left(6 - \frac{67}{42} + 3 \left(-\frac{5}{6} \right) \right) = \frac{20}{21}$$

$$\Rightarrow y = -\frac{2}{7} \left(-6 - \frac{1}{2} \left(-\frac{5}{6} \right) \right) = \frac{67}{42}$$

Lösung $x = \frac{20}{21}, y = \frac{67}{42}, z = -\frac{5}{6}$

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 2 \\ 3 & -4 & 5 & 4 \\ -1 & 1 & -3 & -2 \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -3 & -2 \\ 3 & -4 & 5 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 2 \end{array} \begin{array}{l} | \cdot 3 \quad | \cdot 2 \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & -4 & -2 \\ 0 & -1 & -5 & -2 \end{array} \begin{array}{l} | \cdot (-1) \\ \leftarrow \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \Rightarrow z = 0$$

$$\Rightarrow x = 4$$

$$\Rightarrow y = 2$$

Lösung $x = 4, y = 2, z = 0$

Aufgabe 3

$$\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 2 & 1 & -1 & 4 & 1 \cdot 2 & 1 \cdot 3 & 1 \cdot 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 0 & \leftarrow & & \\ 3 & 4 & -1 & -2 & 0 & \leftarrow & & \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & \leftarrow & & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 2 & 1 & -1 & 4 & & & \\ 0 & 5 & 6 & 1 & 8 & 1 \cdot (-2) & 1 \cdot (-\frac{11}{5}) & \\ 0 & 10 & 2 & -5 & 12 & \leftarrow & & \\ 0 & 11 & 6 & -3 & 16 & \leftarrow & & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 2 & 1 & -1 & 4 & & & \\ 0 & 5 & 6 & 1 & 8 & & & \\ 0 & 0 & -10 & -7 & -4 & 1 \cdot (-\frac{1}{10} \cdot \frac{36}{5}) & & \\ 0 & 0 & -\frac{36}{5} & -\frac{26}{5} & -\frac{8}{5} & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 2 & 1 & -1 & 4 & & & \Rightarrow x_1 = 2 \\ 0 & 5 & 6 & 1 & 8 & & & \Rightarrow x_2 = -4 \\ 0 & 0 & -10 & -7 & -4 & & & \Rightarrow x_3 = 6 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{4}{25} & \frac{32}{25} & \Rightarrow x_4 = -8 & & \end{array}$$

Lösung $x_1 = 2, x_2 = -4, x_3 = 6, x_4 = -8$

Aufgabe 4

$$\begin{array}{cccc|c} a) & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & | & 1 & | \cdot (-2) & | \cdot (-5) \\ & 2 & 1 & -2 & 1 & -5 & & & \leftarrow & \\ & 0 & 3 & 1 & -2 & 10 & & & & \\ & 5 & -1 & -4 & 4 & 8 & & & \leftarrow & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|c} & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & -4 & 1 & -7 & & & | \cdot (-3) & | \\ & 0 & 3 & 1 & -2 & 10 & & & \leftarrow & \\ & 0 & -1 & -9 & 4 & 3 & & & \leftarrow & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|c} & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & -4 & 1 & -7 & & & & \\ & 0 & 0 & 13 & -5 & 31 & & & & \\ & 0 & 0 & -13 & 5 & -4 & & & \leftarrow & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|c} & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & -4 & 1 & -7 & & & & \\ & 0 & 0 & 13 & -5 & 31 & & & & \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 27 & & & & \end{array}$$

$0 \cdot x_4 = 27$ unlösbar

\Rightarrow das GLS ist unlösbar

$$\begin{array}{cccc|cc}
 \text{b)} & 1 & -1 & -2 & 3 & 3 & | \cdot (-1) & | \cdot (-1) \\
 & 0 & 1 & 1 & -2 & -2 & & \\
 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & \leftarrow & \\
 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & \leftarrow &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|cc}
 & 1 & -1 & -2 & 3 & 3 & & \\
 & 0 & 1 & 1 & -2 & -2 & | \cdot (-1) & | \cdot (-2) \\
 & 0 & 1 & 1 & -2 & -2 & \leftarrow & \\
 & 0 & 2 & 2 & -2 & -2 & \leftarrow &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|cc}
 & 1 & -1 & -2 & 3 & 3 & & \\
 & 0 & 1 & 1 & -2 & -2 & & \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\
 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & &
 \end{array}$$

$0 \cdot x_4 = 0$ erfüllt für alle $x_4 \in \mathbb{R}$

\Rightarrow das GLS hat unendlich viele Lösungen.