

Übungen zur Mathematik
Lösungen Blatt 8

Aufgabe 1

a) $f(x) = x^5 - 37$

Sekanten - Verfahren :

$$x_{m+1} = \frac{x_{m-1}(x_m^5 - 37) - x_m(x_{m-1}^5 - 37)}{x_m^5 - x_{m-1}^5}$$

Startwerte $x_0 = 2$ und $x_1 = 3$

Iteration :

| m | x_m |
|-----|--------------------|
| 0 | 2.0 |
| 1 | 3.0 |
| 2 | 2.023696682464455 |
| 3 | 2.0379812936402693 |
| 4 | 2.0596608001164167 |
| 5 | 2.058909002463697 |
| 6 | 2.0589241256526964 |

7 exakte Stellen

b) Pro Iterationschritt etwa 1,6 -Verfachung der Stellen.

7. Schritt: etwa 11 exakte Nachkommastellen

8. " " 17 " "

Also etwa zwei weitere Iterationsschritte erforderlich.

c) Newton-Verfahren:

| n | x_n |
|-----|---|
| 0 | 2.0 |
| 1 | 2.0625 |
| 2 | 2.058936514320937 |
| 3 | 2.0589241366273416 |
| 4 | 2.0589241366273416 2.0589241366273416 |

Das Newton-Verfahren liefert bereits für x_4 16 exakte Nachkommastellen.

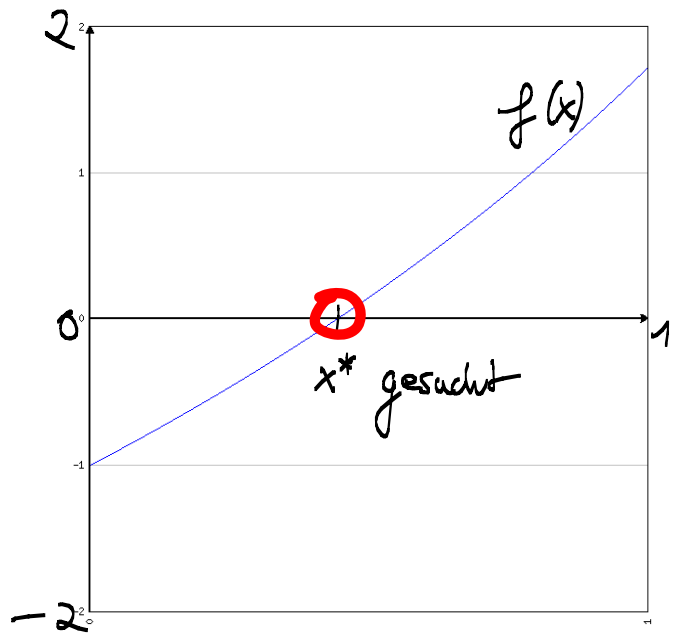
Aufgabe 2

$$f(x) = e^x + x - 2 \stackrel{!}{=} 0$$

$$f(0) = -2 < 0$$

$$f(1) = e - 1 = 1,718\dots$$

$\Rightarrow f$ hat eine Nullstelle
in $[0, 1]$



Sekanten-Verfahren

$$\begin{aligned} x_{m+1} &:= \frac{x_{m-1}(e^{x_m} + x_m - 2) - x_m(e^{x_{m-1}} + x_{m-1} - 2)}{e^{x_m} + x_m - (e^{x_{m-1}} + x_{m-1})} \\ &= \frac{x_{m-1}e^{x_m} - x_me^{x_{m-1}} + 2(x_m - x_{m-1})}{e^{x_m} - e^{x_{m-1}} + x_m - x_{m-1}} \end{aligned}$$

Startwerte $x_0 = 0$ und $x_1 = 1$

| n | x_n |
|-----|---------------------|
| 0 | 0.0 |
| 1 | 1.0 |
| 2 | 0.36787944117144233 |
| 3 | 0.4300563616528946 |
| 4 | 0.4431457539835317 |
| 5 | 0.44285326612742365 |
| 6 | 0.4428544009017152 |
| 7 | 0.4428544010023886 |
| 8 | 0.4428544010023886 |

\rightarrow keine Verbesserung

Für 16 exakte Nachkommastellen sind 6 Iterationen notwendig.

b) Newton-Verfahren:

| n | x_n | |
|-----|--------------------|--------------------------|
| 0 | 1,0 | |
| 1 | 0.5378828427399902 | |
| 2 | 0.4456167485265453 | 2 Nachkommastellen exakt |
| 3 | 0.44285672464511 | 5 " " |
| 4 | 0.4428544010040325 | 11 " " |
| 5 | 0.4428544010023886 | 16 " " |
| 6 | 0.4428544010023886 | keine Verbesserung |

Die 5. Iteration liefert 16 exakte Nachkommastellen.

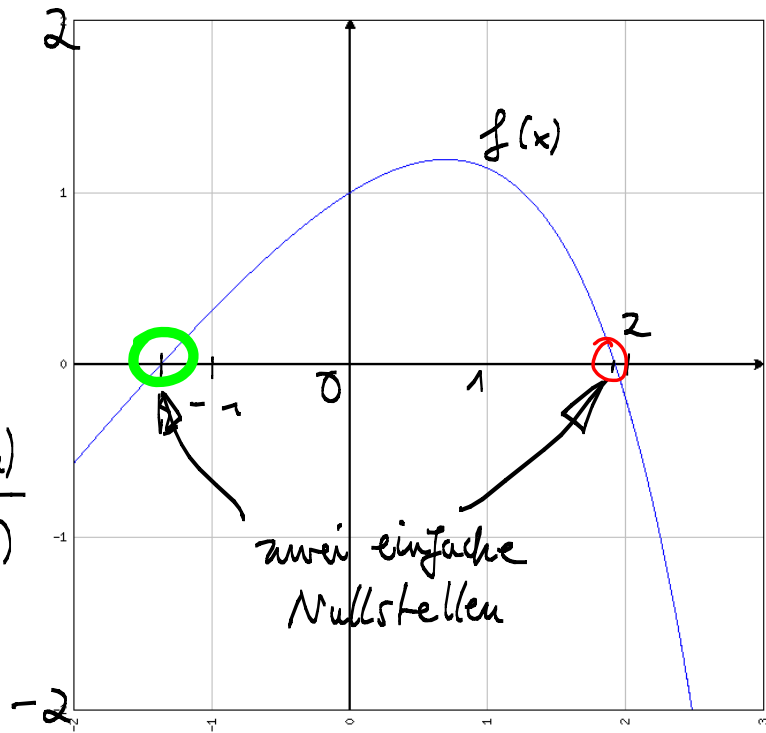
Das Newton-Verfahren ist geringfügig besser als das Sekanten-Verfahren.

Aufgabe 3

$$f(x) = x + \frac{1}{2}(3 - e^x)$$

Sekanten - Verfahren

$$x_{n+1} := \frac{x_{n-1} f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$



Startwerte : $x_0 = 1,5$, $x_1 = 2$

| n | x_n |
|-----|--------------------|
| 0 | 1.5 |
| 1 | 2.0 |
| 2 | 1.8980122616417123 |
| 3 | 1.9225720335969771 |
| 4 | 1.923964033608624 |
| 5 | 1.9239387259282623 |
| 6 | 1.9239387503454435 |
| 7 | 1.9239387503458796 |
| 8 | 1.9239387503458796 |

← 16 exakte Nachkommastellen

Startwerte : $x_0 = -1,5$, $x_1 = -1$

Iterationstabelle :

| n | x_n |
|-----|---------------------|
| 0 | -1.5 |
| 1 | -1.0 |
| 2 | -1.3695527783856596 |
| 3 | -1.37349608343 |
| 4 | -1.3733745116294598 |
| 5 | -1.3733745453516468 |
| 6 | -1.373374545351944 |
| 7 | -1.373374545351944 |

← 16 exakte Nachkommastellen

b) Newton - Verfahren

| n | |
|-----|--------------------|
| 0 | 1,5 |
| 1 | 2.1118054625816223 |
| 2 | 1.9458288754394473 |
| 3 | 1.9242717513178611 |
| 4 | 1.9239388286451107 |
| 5 | 1.9239387503458838 |
| 6 | 1.923938750345879 |
| 7 | 9239387503458796 |

1 exakte Nachkommastelle

2 " "

6 " "

13 " "

16 " "

kein Verbesserung

Startwert $x_0 = -1$

| n | |
|-----|---------------------|
| 0 | -1,0 |
| 1 | -1.3873001632197179 |
| 2 | -1.3733884455187348 |
| 3 | -1.3733745453659503 |
| 4 | -1.3733745453519439 |
| 5 | -1.3733745453519439 |

1 exakte Nachkommastelle

4 " "

10 " "

16 " "

keine Verbesserung

Das Newton-Verfahren ist geringfügig besser als das Sekanten-Verfahren.