

Übungen zur Mathematik
Lösungen Blatt 5

Aufgabe 1

a) $f(x) = x^5 - 37$
 $f'(x) = 5x^4$

Newton-Verfahren:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^5 - 37}{5x_n^4}$$

$$x_{n+1} = \frac{4x_n}{5} + \frac{37}{5x_n^4}$$

Startwert: $x_0 = 2$

Iteration: $x_1 = \frac{33}{16} = 2,0625$

$$x_2 = 2,0589365\dots$$

4 Nachkommastellen exakt

b) Pro Iterationsschritt etwa Verdopplung der Stellen.

3. Schritt: etwa 8 exakte Nachkommastellen

4. " " 16 " "

Also etwa zwei weitere Iterationsschritte erforderlich.

c) Mit dem Newton-Verfahren erhält man bereits nach 4 Iteration 16 exakte Nachkommastellen. Mit der Iteration der Aufgabe 2 auf Blatt 4 erhält man den Wert von $\sqrt{5}$ erst nach 19 Iterationen auf 16 Nachkommastellen genau.

Aufgabe 2

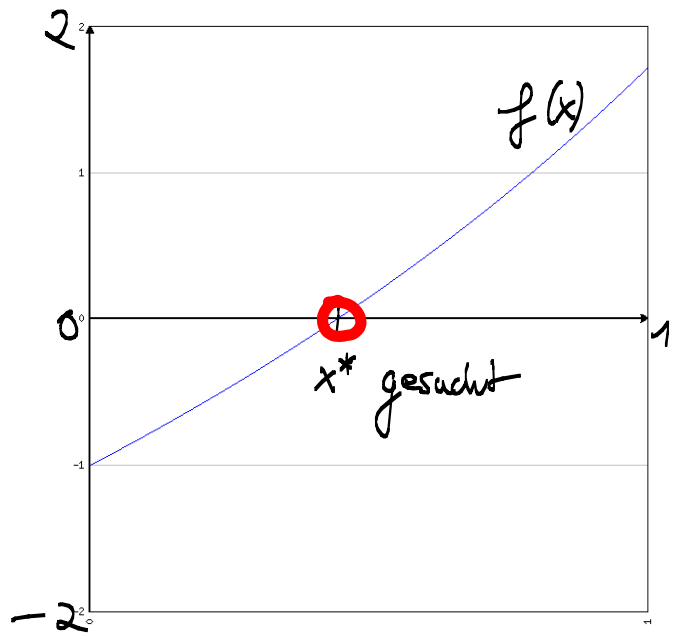
$$f(x) = e^x + x - 2 \stackrel{!}{=} 0$$

$$f'(x) = e^x + 1$$

$$f(0) = -2 < 0$$

$$f(1) = e - 1 = 1,718\dots$$

$\Rightarrow f$ hat eine Nullstelle
in $[0, 1]$



$f'(x) = e^x + 1 \neq 0 \Rightarrow$ Nullstelle in $[0, 1]$ einfach

Startwert $x_0 := 1$

$$\text{Newton-Iteration: } x_{m+1} := x_m - \frac{e^{x_m} + x_m - 2}{e^{x_m} + 1}$$

$$m = 0, 1, 2, \dots$$

| m | x_m | | |
|-----|--------------------|----|------------------------|
| 0 | 1,0 | | |
| 1 | 0.5378828427399902 | | |
| 2 | 0.4456167485265453 | 2 | Nachkommastellen exakt |
| 3 | 0.44285672464511 | 5 | " " |
| 4 | 0.4428544010040325 | 11 | " " |
| 5 | 0.442854401002388 | 16 | " " |
| 6 | 0.4428544010023886 | | keine Verbesserung |

Die 5. Iteration liefert 16 exakte Nachkommastellen.

Aufgabe 3

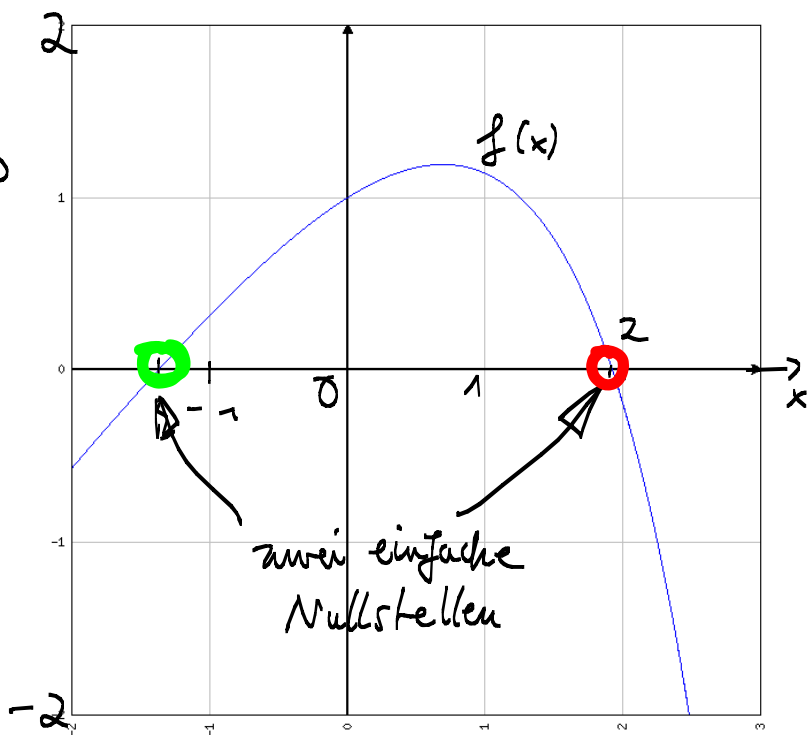
$$f(x) = x + \frac{1}{2}(3 - e^x) \stackrel{!}{=} 0$$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{2}e^x$$

Newton-Iteration

$$x_{m+1} = x_m - \frac{2x + 3 - e^{x_m}}{2 - e^{x_m}}$$

$m = 1, 2, \dots$



Startwert $x_0 = 1,5$

| m | |
|-----|------------------------|
| 0 | 1,5 |
| 1 | 2.1118054625816223 |
| 2 | 1.9458288754394473 |
| 3 | 1.9242717513178611 |
| 4 | 1.9239388286451107 |
| 5 | 1.9239387503458838 |
| 6 | 1.923938750345779 |
| 7 | 9239387503458796 1. |

1 exakte Nachkommastelle

2 " "

6 " "

13 " "

16 " "

kein Verbesserung

Startwert $x_0 = -1$

| m | |
|-----|---------------------|
| 0 | -1,0 |
| 1 | -1.3873001632197179 |
| 2 | -1.3733884455187348 |
| 3 | -1.3733745453659503 |
| 4 | -1.3733745453519439 |
| 5 | -1.3733745453519439 |

1 exakte Nachkommastelle

4 " "

10 " "

16 " "

keine Verbesserung