

Übungen zur Mathematik
Lösungen Blatt 4

Aufgabe 1

$$f_i(x) = x$$

$$\Leftrightarrow x^5 = 37$$

$$x^* = \sqrt[5]{37} \quad \text{Fixpunkt}$$

a) $f_1'(x) = 1 - \frac{5}{111} x^4$, $|f_1'(x^*)| = 0,19 \dots < 1$

x^* anziehender Fixpunkt von f_1

b) $f_2'(x) = 1 - \frac{5}{148} x^4$, $|f_2'(x^*)| = 0,39 \dots < 1$

x^* anziehender Fixpunkt von f_2

c) $f_3'(x) = 1 - \frac{5}{3} x^4$, $|f_3'(x^*)| = |-28,95 \dots| > 1$

x^* abstoßender Fixpunkt von f_3

Aufgabe 2

a+b) Startwert $x_0 = 2$

$$\underline{x_{n+1} = f_1(x_n):}$$

Nach 19 Iterationen (\rightarrow Applet) erhält man 15 exakte Nachkommastellen:

$$\sqrt[5]{37} = 2.058924136478517$$

$$\underline{x_{n+1} = f_2(x_n):}$$

Nach 35 Iterationen (\rightarrow Applet) erhält man 15 exakte Nachkommastellen.

$$\underline{x_{n+1} = f_3(x_n):}$$

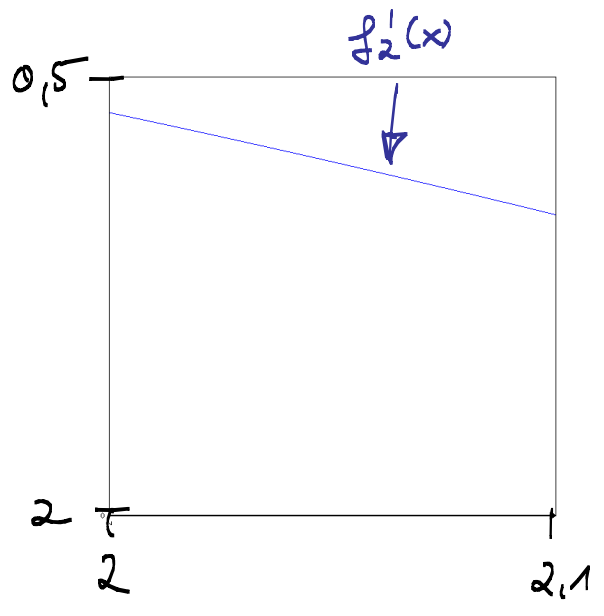
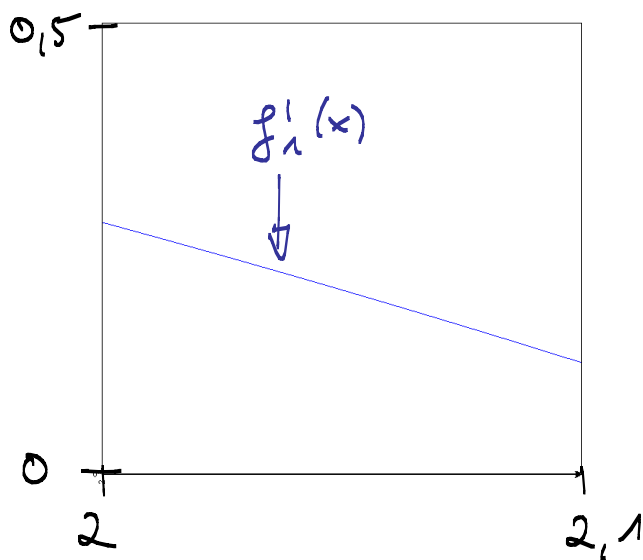
$$x_n \rightarrow \infty \quad (\rightarrow \text{Applet}).$$

Divergenz.

Konvergenz ist im ersten Fall schneller als im zweiten, Grund:

$$|f_1'(x^*)| = 0,19 \dots < |f_2'(x^*)| = 0,39 \dots$$

c) $x \in [2,0; 2,1]$



$$f'_1(x) = 1 - \frac{5}{111} x^4 \quad \text{monoton fallend}$$

$$|f'_1(x)| \leq f'_1(2) = 1 - \frac{5}{111} 2^4 \leq 0,28 =: L_1$$

$$f'_2(x) = 1 - \frac{5}{148} x^4 \quad \text{monoton fallend}$$

$$|f'_2(x)| \leq f'_2(2) = 1 - \frac{5}{148} 2^4 \leq 0,46 =: L_2$$

d) Fehlerabschätzung für Iteration mit f_1 :

$$|x_n - \sqrt[5]{37}| \leq \underline{1,39 \cdot (0,28)^n} \underbrace{|x_1 - 2|}_{\leq 0,05}$$

Fehlerabschätzung für Iteration mit f_2 :

$$|x_n - \sqrt[5]{37}| \leq \underline{1,86 \cdot (0,46)^n} \underbrace{|x_1 - 2|}_{\leq 0,04}$$