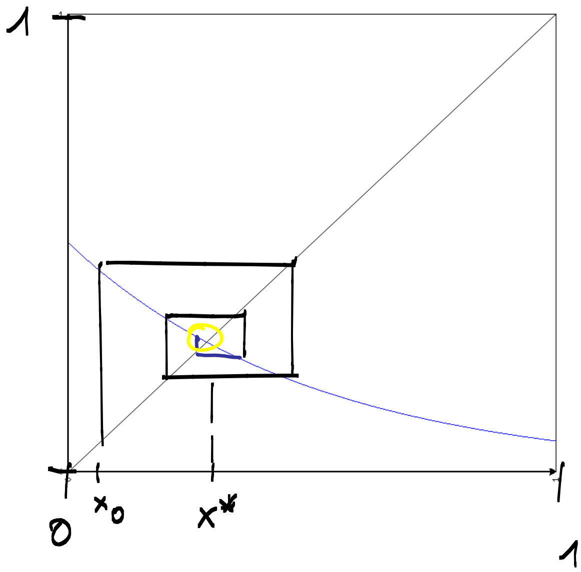
Übungen zur Mathematik
Lösungen Blatt 2

Aufgabe 1

$$f(x) = \frac{1}{2} e^{-2x}$$

$$x \in (0,1)$$



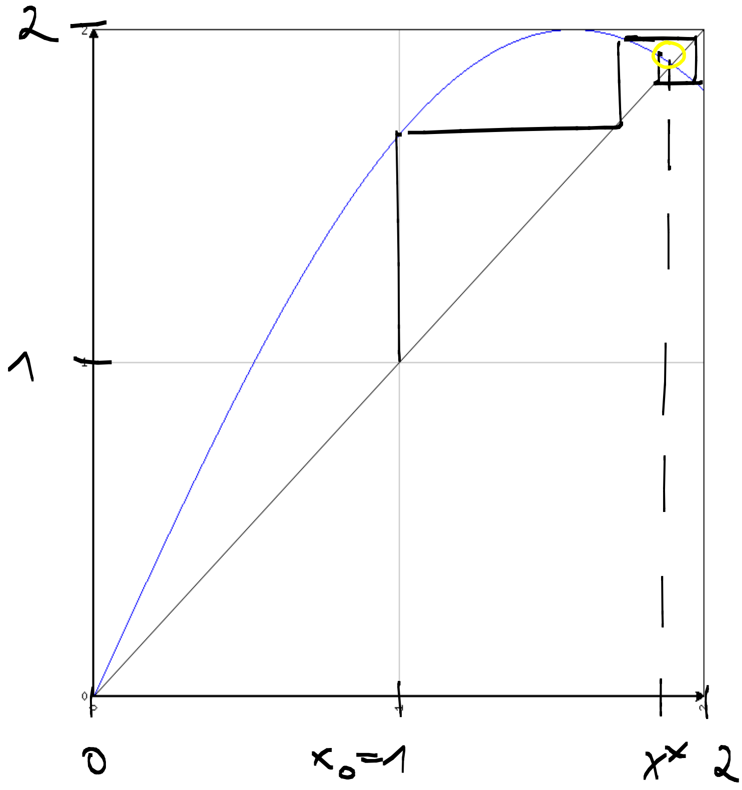
n	x_n	$f(x_n)$
0	0.2	0.33516002301781966
1	0.33516002301781966	0.2557724168445208
2	0.2557724168445208	0.2997843145939241
3	0.2997843145939241	0.27452421424209883
4	0.27452421424209883	0.2887495403398157
5	0.2887495403398157	0.2806501898189131
6	0.2806501898189131	0.2852333789787898
7	0.2852333789787898	0.28263076839737933
8	0.28263076839737933	0.28410575955156814
9	0.28410575955156814	0.2832688875728478

nur zwei exakte Nachkommastellen

Konvergenz sehr langsam

$f(x) = 2\sin(x)$

$x \in (0,2)$



n	x_n	$f(x_n)$
0	1.0	1.682941969615793
1	1.682941969615793	1.9874365302721515
2	1.9874365302721515	1.8289075526235796
3	1.8289075526235796	1.933747642340163
4	1.933747642340163	1.869706153630775
5	1.869706153630775	1.9113161791252615
6	1.9113161791252615	1.885162348212226
7	1.885162348212226	1.9019852096639491
8	1.9019852096639491	1.8913128516514188
9	1.8913128516514188	1.898145620030172

eine exakte Nachkommastelle

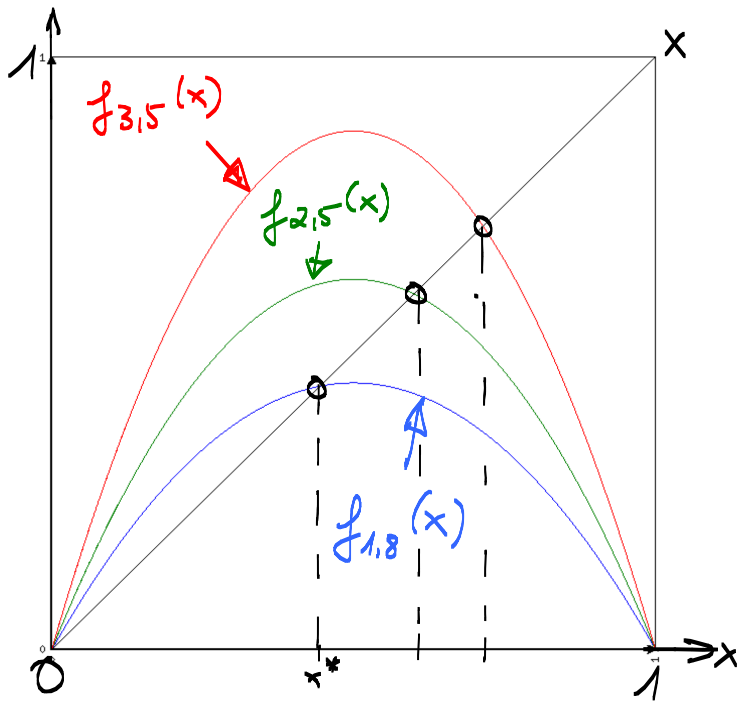
Konvergenz sehr langsam

Aufgabe 2

In Aufgabe 1 haben wir gesehen, dass die Konvergenz sehr langsam sein kann.
Hier wollen wir etwas systematischer vorgehen und die Iteration für die quadratischen Funktionen

$f_\alpha : [0,1] \to [0,1]$,

$f_\alpha := \alpha x(1-x)$,



untersuchen, wobei α ein Parameter ist mit $1 < \alpha \le 4$.

a) Wie lautet der Fixpunkt x^*?

$$\alpha x(1-x) = x$$

$$\overset{x \neq 0}{\Longleftrightarrow} \quad \alpha(1-x) = 1$$

$$\Longleftrightarrow \quad 1 - x = \frac{1}{\alpha}$$

$$x = 1 - \frac{1}{\alpha}$$

d.h. $\boxed{x^*_\alpha = 1 - \frac{1}{\alpha}}$ ist der Fixpunkt (hängt von α ab!)

b) $f'(x) = \alpha(x - x^2)' = \alpha(1-2x)$

$$f'(x_\alpha^*) = \alpha\left(1 - 2\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)\right)$$
$$= \alpha\left(-1 + \frac{2}{\alpha}\right) = 2 - \alpha$$

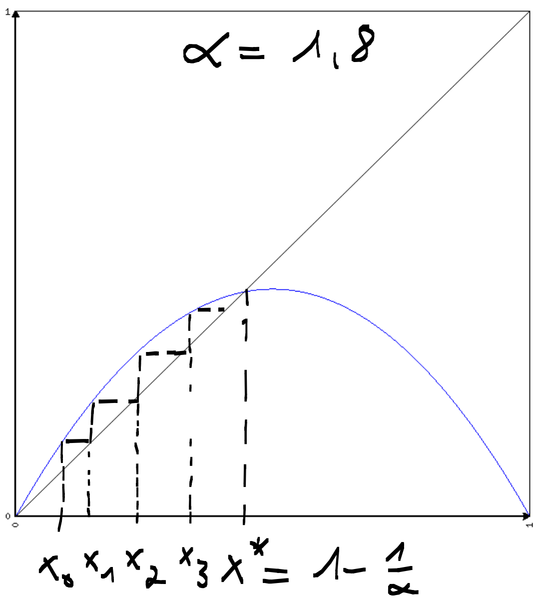
$\alpha \in (1, 3): \ |f'(x_\alpha^*)| < 1$

x^* ist ein anziehender Fixpunkt

$x \in (3, 4]: \ |f'(x_\alpha^*)| > 1$

x^* ist ein abstoßender Fixpunkt

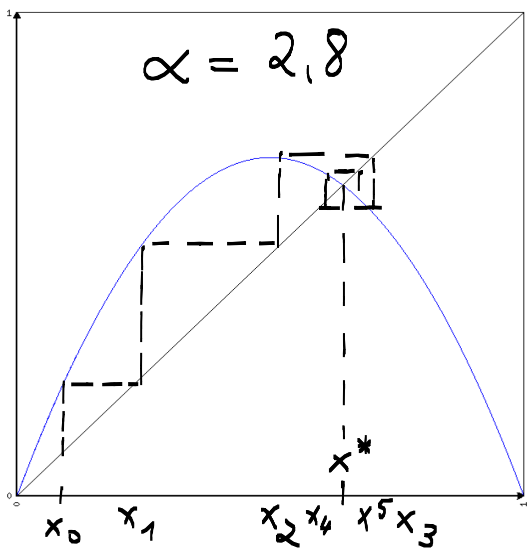
c) <u>Fall $1 < \alpha \leq 2$</u>



Es ist $x^* \in (0, \frac{1}{2}]$.

Für jeden Startwert $x_0 \in (0, 1 - \frac{1}{\alpha})$ konvergieren die Fixpunktiterierten gegen den Fixpunkt x^*, und zwar monoton steigend, d.h. $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots$

<u>Fall $2 < \alpha < 3$</u>



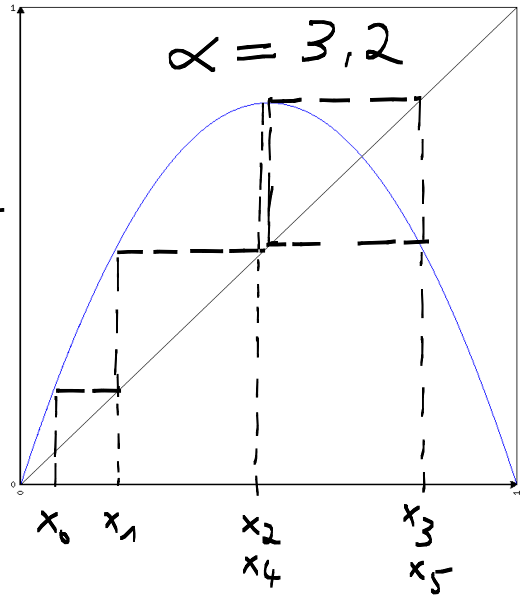
$x^* \in (\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$

Für jeden Startwert $x^* \in (0, 1 - \frac{1}{\alpha})$ konvergieren die Fixpunktiterierten gegen den Fixpunkt x^*, und zwar alternierend (siehe Grafik).

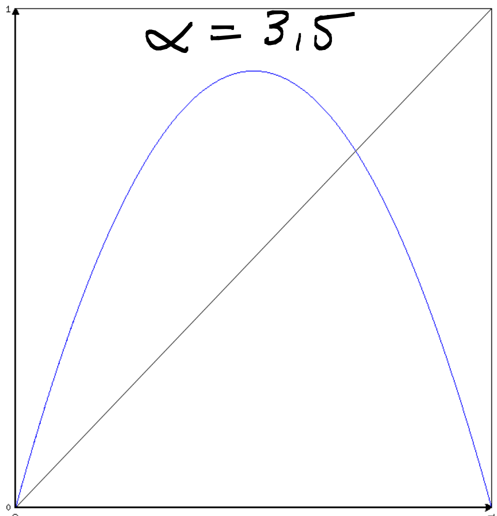
d) Fall $3 < \alpha \leq 4$

$x^* \in \left(\frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right]$.

Wegen $|f'(x_\alpha^*)| > 1$ ist die Tangente im Fixpunkt zu steil. Dies bewirkt Divergenz.
x^* ist ein abstoßender Fixpunkt.



Es ergibt sich ein überraschender Effekt: Falls $\alpha \in (3; 3{,}449\ldots)$ ist, hat die Iteriertenfolge zwei Häufungspunkte, zwischen denen sie „hin und her springt".
Man sagt, der Attraktor der Folge ist zweipunktig.



Erhöht man α weiter so ergeben 4-punktige, 8-punktige, allgemein 2^m-punktige Attraktoren.
Jenseits von $\alpha > 3{,}569\ldots$ tritt Chaos ein. Die Iterierten springen völlig „wirr" hin und her.

Zu der Parabeliterationen gibt es ein Java-Applet, mit dem man die beschriebenen Phänomene visualisieren kann.

Die Parabeliteration zeigt, dass sich Fixpunktiterationen qualitativ sehr unterschiedlich verhalten können, falls die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes verletzt sind.