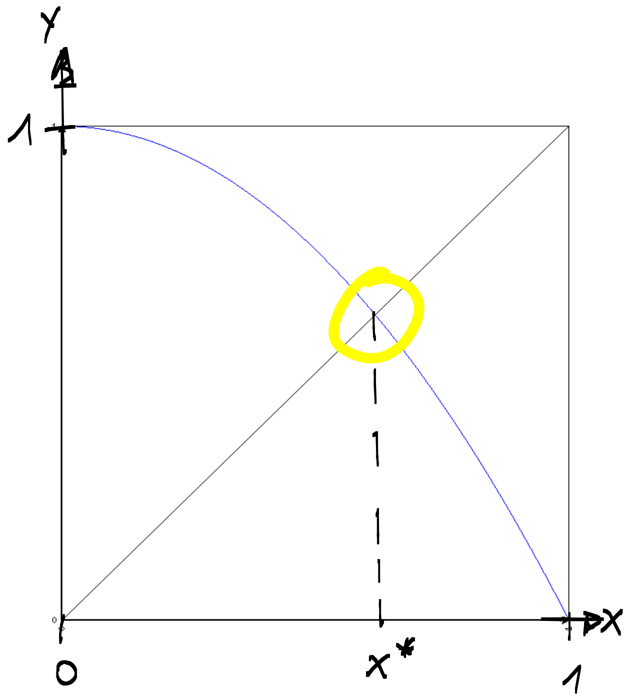
Übungen zur Mathematik
Lösungen Blatt 1

Aufgabe 1

a) $f: [0,1] \to \mathbb{R}$

$f(x) = 1 - x^2$



$$1 - x^2 = x$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + x = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + x + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 = 1 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(x + \tfrac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$$

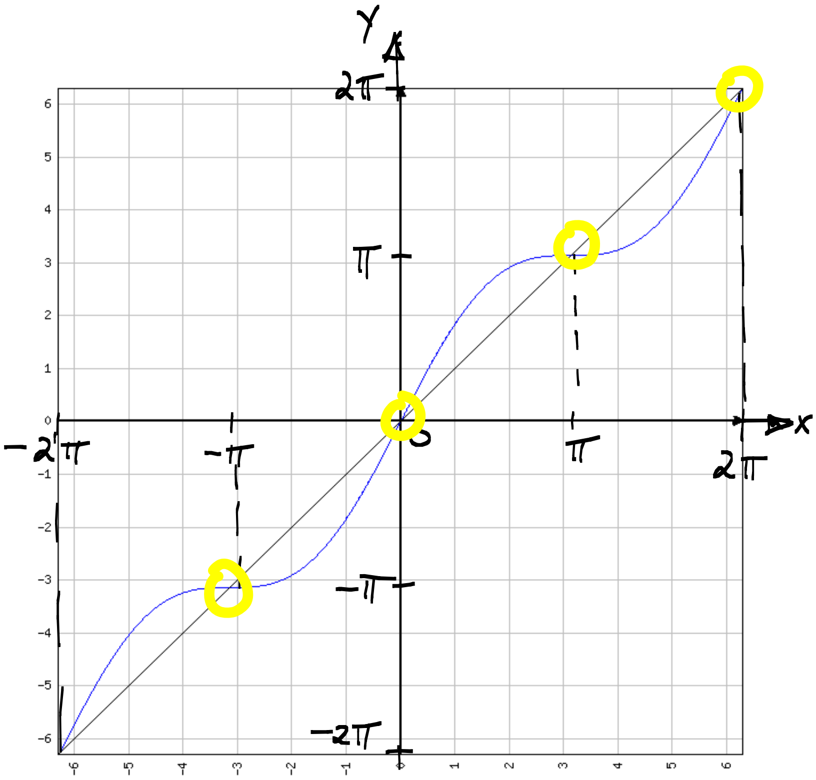
$$\Leftrightarrow \quad x + \tfrac{1}{2} = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{\pm\sqrt{5} - 1}{2}$$

Da $\frac{-\sqrt{5}-1}{2} < 0$ ist, ist die gesuchte Lösung $x^* = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0{,}618\ldots$ Fixpunkt b)

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = x + \sin(x)$

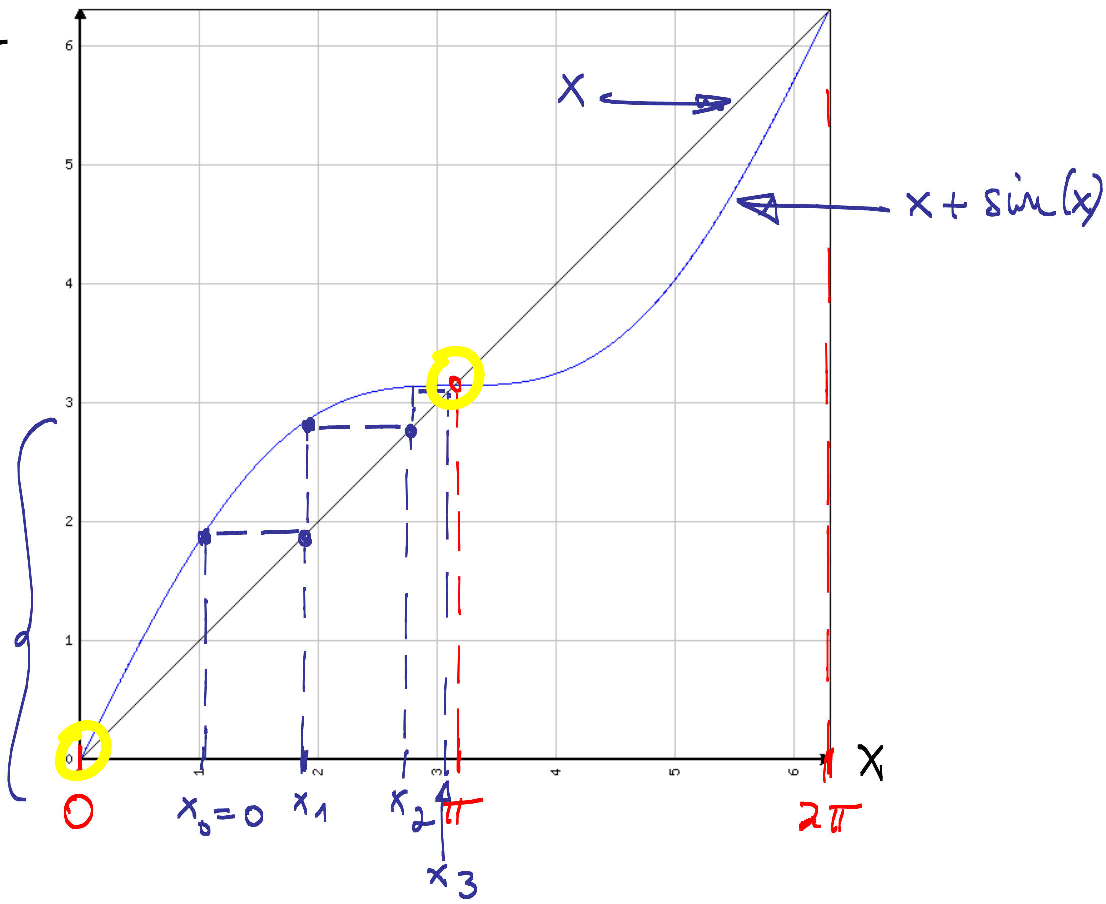


$x + \sin(x) = x$

$\iff \sin(x) = 0$

$\iff x = k \cdot \pi, \quad k \in \mathbb{Z}$ Fixpunkte

Aufgabe 2



Fixpunkt-iteration

$x_{n+1} = f(x_n)$

$n = 0, 1, 2$

Fixpunkte in $[0, \pi]$: $x_0^* = 0$, $x_1^* = \pi$ und $x_2^* = 2\pi$

b) Fixpunktiterationen $x_{n+1} = x_n + \sin(x_n)$, $n = 0, 1, 2, 3, 4$.

Startwert: $x_0 = 1$

Fixpunktiteration:

$$x_1 = f(x_0) = 1 + \sin(1) = 1{,}84147\ldots$$

$$x_2 = f(x_1) = 1{,}84\ldots + \sin(1{,}84\ldots) = 2{,}80506\ldots$$

$$x_3 = f(x_2) = 2{,}80\ldots + \sin(2{,}80\ldots) = 3{,}13276\ldots$$

$$x_4 = f(x_3) = 3{,}13\ldots + \sin(3{,}13\ldots) = 3{,}14159\ldots$$

$$x_5 = f(x_4) = 3{,}14\ldots + \sin(3{,}14\ldots) = 3{,}14159\ldots$$

keine Verbesserung an Genauigkeit, daher sind 5 Nachkommastellen exakt

Konvergenz:

$x_n \to \pi$ für $n \to \infty$.

n	x_n	$f(x_n) = x_n + \sin(x_n)$	Anzahl exakter Nachkommast.
0	1.0	1.841470984807896	
1	1.8414709848078965	2.80506170934973	
2	2.80506170934973	3.135276332899716	
3	3.135276332899716	3.141592611590653	1 Stellen exakt
4	3.141592611590653	3.141592653589793	7 " "
5	3.141592653589793	3.141592653589793	15 " "

keine Verbesserung an Genauigkeit

Konvergenz: $x_n \to \pi$ $(n \to \infty)$

c) Startwert $x_0 = 5$:

n	x_n	$f(x_n)$	Anzahl exakter Nachkommast.
0	5.0	4.041075725336862	
1	4.041075725336862	3.258070248108247	
2	3.2580702481082477	3.141855850823108	
3	3.141855850823108	3.141592653592832	3
4	3.141592653592832	3.141592653589793	10
5	3.141592653589793	3.141592653589793	15

Konvergenz: $x_n \to \pi \ (n \to \infty)$

Da $x = 0$ ein Fixpunkt ist, führt die Iteration mit Startwert $x_0 = 0$ auf

$$x_1 = f(0) = 0$$
$$x_2 = f(x_1) = f(0) = 0$$
$$\vdots$$
$$x_n = 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

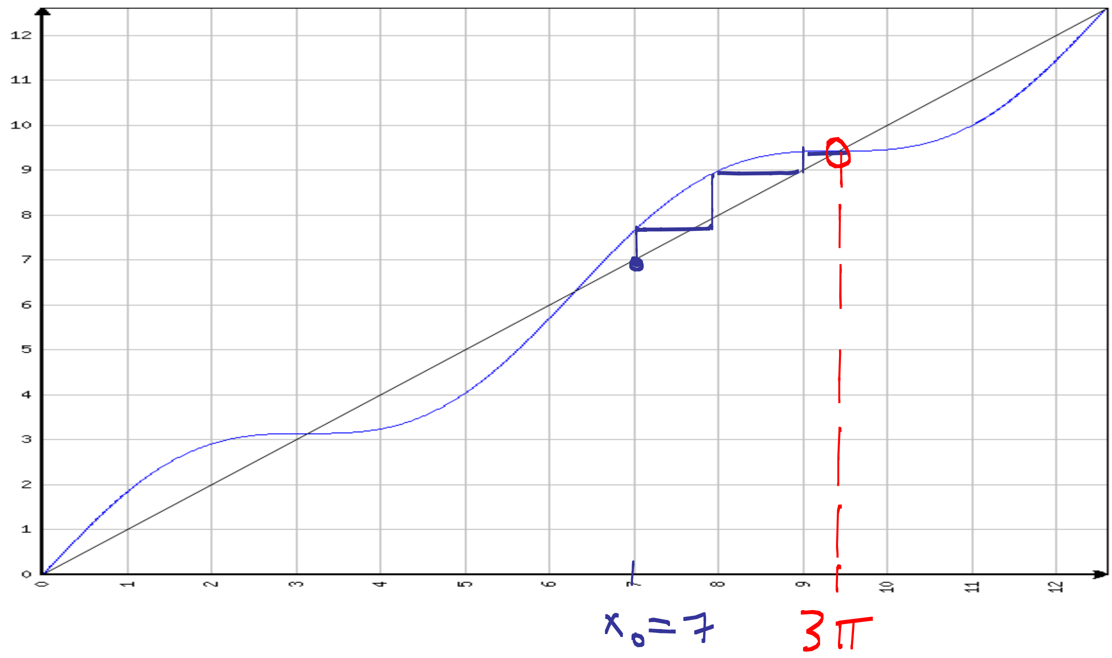
Daher trivialerweise $x_n \to 0 \ (n \to \infty)$.

d) Startwert $x_0 = 7$:

n	x_n	$f(x_n)$
0	7.0	7.656986598718789
1	7.656986598718789	8.637645745090698
2	8.637645745090698	9.345977622677124
3	9.345977622677124	9.424696434390352
4	9.424696434390352	9.424777960769289
5	9.424777960769289	9.42477796076938

$= 3\pi$ exakt auf 11 Nachkommastellen

Konvergenz: $x_n \to 3\pi \ (n \to \infty)$.



Startwert $x_0 = -1$:

n	x_n	$f(x_n)$	Exaktheit
0	-1.0	-1.841470984807896	
1	-1.8414709848078965	-2.80506170934973	
2	-2.80506170934973	-3.135276332899716	
3	-3.135276332899716	-3.141592611590653	1
4	-3.141592611590653	-3.141592653589793	7
5	-3.141592653589793	-3.141592653589793	15

dieser Fixpunkt liegt außerhalb des Intervalls $[0, 2\pi]$

Konvergenz: $x_n \to -\pi \quad (n \to \infty)$

Da die Funktion f unendlich viele Fixpunkte ($x_n^* = k \cdot \pi$, $k \in \mathbb{Z}$) hat, hängt es davon ab, welcher Startwert gewählt wird:

$$x_0 \in (2\pi, 4\pi): \quad x_n \to 3\pi$$

$$\underbrace{x_0 \in (-2\pi, 0)}_{\text{Einzugsgebiete der Fixpunkte}}: \quad x_n \to -\pi$$

e) Allgemein gilt für gerade Zahlen $k \in \mathbb{Z}$:

$$x_0 \in (k\pi, (k+2)\pi): \quad x_n \to (k+1)\pi$$

$$x_0 = k\pi: \quad x_n \to k\pi$$