

KL AUSSUR - Vorbereitung: Fourrier - Reihen

1.) Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die 2π -periodische Fortsetzung von

$$f(x) = \begin{cases} \pi + x, & -\pi \leq x \leq 0 \\ \pi - x, & 0 < x \leq \pi \end{cases}.$$

a) Stellen Sie den Verlauf von f grafisch dar.

b) Berechnen Sie alle Koeffizienten der Fourrier-Reihe

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)).$$

Zeigen Sie, dass $b_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt und

$$a_k = \begin{cases} \frac{4}{k^2\pi} & , k \text{ ungerade} \\ 0 & , k \text{ gerade} \end{cases} \text{ für } k \in \mathbb{N}.$$

c) Schreiben Sie die Fourrier-Reihe auf und geben Sie die 1. und 3. Näherung an.

2.) Berechnen Sie die Fourrier-Entwicklung der 2π -periodischen Fortsetzungen folgender Funktionen.

a) $f: [-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x|$

b) $f: [-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x$

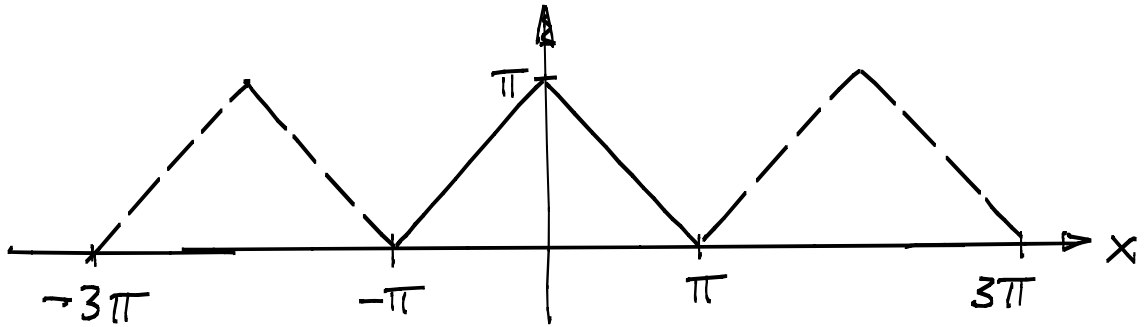
c) $f: [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \pi \\ 0, & x = 0, x = \pi \\ -1, & \pi < x < 2\pi \end{cases}$

Stellen Sie zunächst die Funktionen grafisch dar.

Lösungen

1.)

a) Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \pi + x, & -\pi \leq x \leq 0 \\ \pi - x, & 0 < x \leq \pi \end{cases}$



b) f ist eine gerade Funktion. Daher gilt:

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x)}_{\text{ungerade}} \underbrace{\sin(kx)}_{\text{ungerade}} dx = 0 \text{ f\u00fcr } k \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \\ &= 2 \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \overbrace{f(x)}^{\pi-x} dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\pi x - \frac{1}{2} x^2 \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\pi^2 - \frac{1}{2} \pi^2 \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{2} \pi^2 \right) \\ &= \underline{\underline{\pi}} \end{aligned}$$

Berechnung von a_k für $k=1, 2, 3, \dots$:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x) \cos(kx)}_{\text{gerade}} dx$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(kx) dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \underbrace{(\pi-x)}_u \underbrace{\cos(kx)}_{v'} dx \quad \text{partielle Integration}$$

$$\stackrel{k \neq 0}{=} \frac{2}{\pi} \left[(\pi-x) \cdot \frac{1}{k} \sin(kx) \right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (-1) \frac{1}{k} \sin(kx) dx$$

$$= \frac{2}{\pi} (0 - 0) + \frac{2}{k\pi} \int_0^{\pi} \sin(kx) dx$$

$$= \frac{2}{k\pi} \left[-\frac{1}{k} \cos(kx) \right]_0^{\pi}$$

$$= -\frac{2}{k^2\pi} \left[\cos(kx) \right]_0^{\pi}$$

$$= -\frac{2}{k^2\pi} \left(\underbrace{\cos(k\pi)}_{(-1)^k} - \underbrace{\cos(0)}_1 \right)$$

$$= -\frac{2}{k^2\pi} \left((-1)^k - 1 \right)$$

$$= -\frac{2}{k^2\pi} \left((-1)^k - 1 \right)$$


$$= \begin{cases} \frac{4}{k^2\pi} & , k \text{ ungerade} \\ 0 & , k \text{ gerade} \end{cases}$$

$$c) f(x) = \underbrace{\frac{a_0}{2}}_{=\frac{\pi}{2}} + \sum_{k=1}^{\infty} (\underbrace{a_k}_{=\begin{cases} \frac{4}{k^2\pi}, k=1,3,5,\dots \\ 0, k=2,4,6,\dots \end{cases}} \cos(kx) + \underbrace{b_k}_{=0} \sin(kx))$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \left(\cos(x) + \frac{1}{3^2} \cos(3x) + \frac{1}{5^2} \cos(5x) + \dots \right)$$

1. Näherung: $f_1(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \cos(x)$

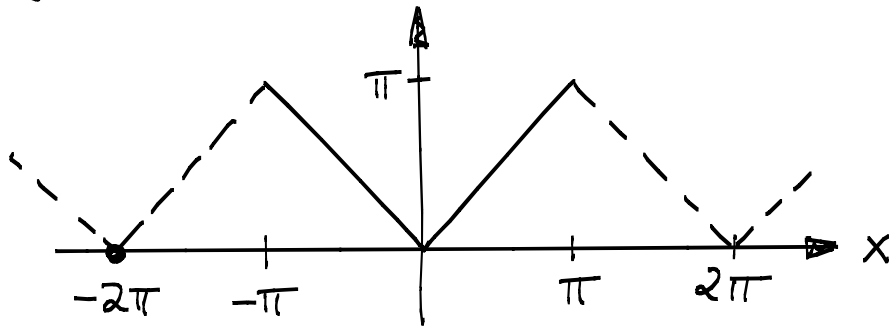
3. Näherung: $f_3(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \cos x + \frac{4}{9\pi} \cos(3x)$



2.)

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π -periodisch

$$f(x) = |x| \text{ für } x \in [-\pi, \pi]$$



f ist eine gerade Funktion.

Es soll f in eine Fourierreihe entwickelt werden:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

Da f gerade ist, gilt

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{|x| \cdot \sin(kx)}_{\text{ungerade}} dx = \underline{\underline{0}} \text{ für alle } k \in \mathbb{N}$$

Berechnung der Koeffizienten a_k :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| dx = 2 \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = 2 \cdot \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{\pi} (\pi^2 - 0) = \pi \end{aligned}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{|x| \cdot \cos(kx)}_{\text{gerade}} dx \quad \text{mit } k \in \mathbb{N}$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \underbrace{x}_u \underbrace{\cos(kx)}_{v'} dx \quad \text{partielle Integration}$$

$$\stackrel{k \neq 0}{=} \frac{2}{\pi} \left[x \cdot \frac{1}{k} \sin(kx) \right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{k} \sin(kx) dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \frac{1}{k} \left(\underbrace{\sin(k\pi)}_{=0} - \underbrace{\sin(0)}_{=0} \right) + \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{k^2} \left[\cos(kx) \right]_0^{\pi}$$

$$= 0 + \frac{2}{\pi} \frac{1}{k^2} \left(\underbrace{\cos(k\pi)}_{(-1)^k} - 1 \right)$$

$$= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{k^2} \cdot \begin{cases} 0, & k = 0, 2, 4, \dots \\ -2, & k = 1, 3, 5, \dots \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & k = 0, 2, 4, \dots \\ -\frac{4}{\pi k^2}, & k = 1, 3, 5, \dots \end{cases}$$

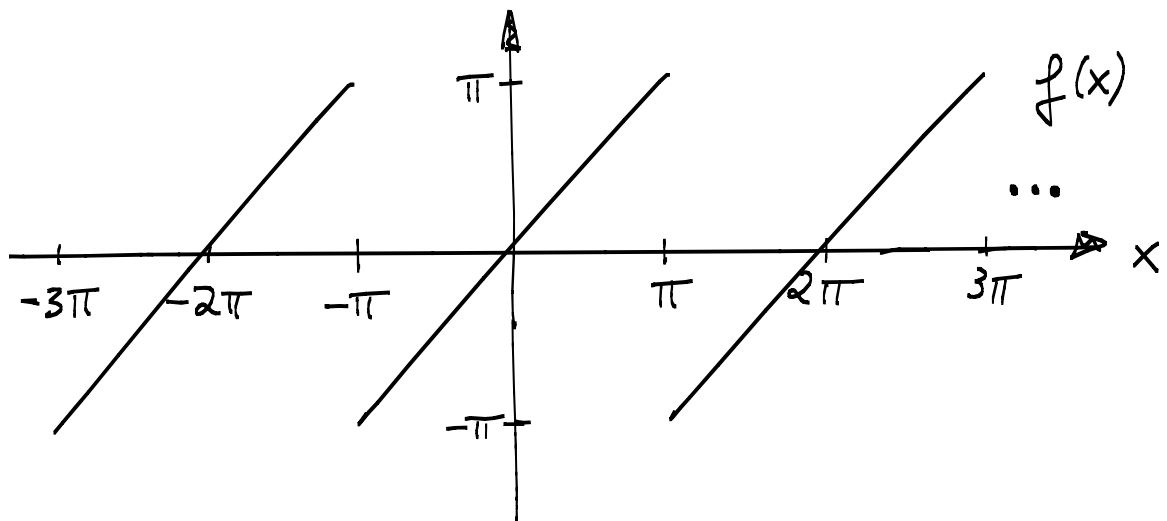
Ergebnis:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + \underbrace{b_k}_{=0} \sin(kx))$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos(x) + \frac{1}{3^2} \cos(3x) + \frac{1}{5^2} \cos(5x) + \dots \right)$$

Fourier-Reihe von f

$$b) f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x$$



f ist eine ungerade Funktion.

Fourier-Reihe

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

Es gilt

$a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, da f ungerade ist

Berechnung der Fourier-Koeffizienten b_k :

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cdot \sin(kx) dx \quad \text{mit } k \in \mathbb{N}$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{\sin(kx)}_{v'} dx \quad \text{partielle Integration}$$

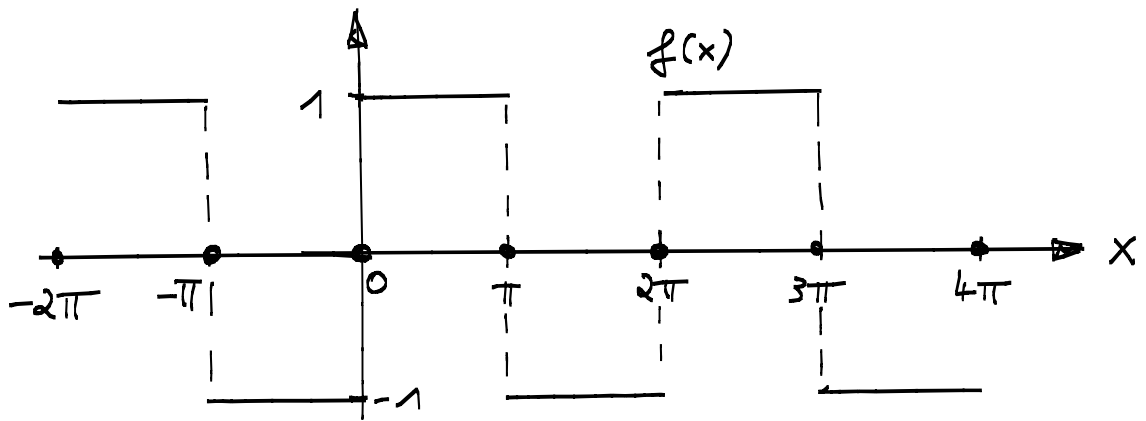
$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{\pi} \left[x \cdot \frac{-1}{k} \cos(kx) \right]_0^{\pi} + \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{k} \int_0^{\pi} \cos(kx) dx \\
&= -\frac{2}{k\pi} \left(\pi \cos(k\pi) - 0 \right) + \frac{2}{k\pi} \cdot \frac{1}{k} \left[\sin(kx) \right]_0^{\pi} \\
&\quad \quad \quad \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{(-1)^k} \qquad \qquad \qquad \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{=0} \\
&\quad \quad \quad \text{da } \sin(k\pi) = 0 \\
&= \underline{\underline{2 \cdot \frac{(-1)^{k+1}}{k}}}
\end{aligned}$$

Ergebnis:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \underbrace{\frac{a_0}{2}}_{=0} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\underbrace{a_k}_{=0} \cos(kx) + b_k \sin(kx) \right) \\
&= 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin(kx) \\
&= \underline{\underline{2 \left(\sin(x) - \frac{1}{2} \sin(2x) + \frac{1}{3} \sin(3x) - \dots \right)}}
\end{aligned}$$

Fourier-Reihe von f

c) Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 < x < \pi \\ 0 & \text{für } x = 0, x = \pi \\ -1 & \text{für } \pi < x < 2\pi \end{cases}$



f ist eine ungerade Funktion. Daher gilt:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x)}_{\text{ungerade}} \underbrace{\cos(kx)}_{\text{gerade}} dx = 0 \text{ für } k \in \mathbb{N}_0.$$

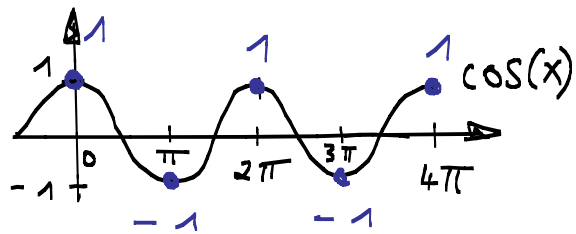
Sei $k = 1, 2, \dots$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \sin(kx) dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \cdot \sin(kx) dx - \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} \sin(kx) dx$$

$$\stackrel{k \neq 0}{=} \frac{1}{\pi} \left[-\frac{1}{k} \cos(kx) \right]_0^{\pi} - \frac{1}{\pi} \left[-\frac{1}{k} \cos(kx) \right]_{\pi}^{2\pi}$$

$$= \frac{-1}{k\pi} \left(\underbrace{\cos(k\pi)}_{(-1)^k} - \underbrace{\cos 0}_1 \right) + \frac{1}{k\pi} \left(\underbrace{\cos(2k\pi)}_{(-1)^{2k}} - \underbrace{\cos(k\pi)}_{(-1)^k} \right)$$



$$= \frac{-1}{k\pi} ((-1)^k - 1) + \frac{1}{\pi} (1 - (-1)^k)$$

$$= \frac{1}{k\pi} (1 - (-1)^k + 1 - (-1)^k)$$

$$= \frac{1}{k\pi} (2 - 2 \cdot (-1)^k)$$

$$= \frac{1}{k\pi} \begin{cases} 0, & k \text{ gerade} \\ 4, & k \text{ ungerade} \end{cases}$$

Also gilt:

$$b_k = \begin{cases} 0, & k \text{ gerade} \\ \frac{4}{k\pi}, & k \text{ ungerade} \end{cases}, k \in \mathbb{N}$$

Ergebnis

$$f(x) = \underbrace{\frac{a_0}{2}}_{=0} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\underbrace{a_k}_{=0} \cos(kx) + \underbrace{b_k}_{\begin{cases} 0, & k \text{ gerade} \\ \frac{4}{k\pi}, & k \text{ ungerade} \end{cases}} \sin(kx) \right)$$

$$= \frac{4}{\pi} \left(\sin(x) + \frac{1}{3} \sin(3x) + \frac{1}{5} \sin(5x) + \dots \right)$$

Fourier-Reihe von f