

# KLAUSUR-Vorbereitung: GSV

1.) Es sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine reguläre Matrix.

a) Formen Sie  $Ax = b$  äquivalent um in  $x = -D^{-1}(L+R)x + D^{-1}b$ .

Tipp:  $A = L + D + R$ .

b) Wie lautet die Iterationsvorschrift des Gesamtschrittverfahrens?

2.) Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 &= 6 \\ 3x_1 + 6x_2 &= 9 \end{aligned}$$

a) Geben Sie die Iterationsvorschrift des Gesamtschrittverfahrens an.

b) Ist die Konvergenz gesichert? Wenn ja, warum?

c) Führen Sie zwei Iterationsschritte mit dem

Startvektor  $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  durch.

3.) Gegeben seien  $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $b = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

Die Iterationsvorschrift des Gesamtschrittverfahrens lautet

$$x^{(m+1)} := -D^{-1}(L+R)x^{(m)} + D^{-1}b \quad (*)$$

- Geben Sie die Matrizen  $D$ ,  $L$  und  $R$  an.
- Berechnen Sie  $D^{-1}$ ,  $-D^{-1}(L+R)$  und  $D^{-1}b$ .
- Überprüfen Sie die Konvergenz von  $(*)$ , indem Sie das Zeilensummenkriterium anwenden.

4.) Welche der folgenden Matrizen erfüllen das Spalten bzw. Zeilensummenkriterium.

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 3 & 4 \\ -1 & 15 & 2 \\ 3 & -4 & 12 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 9 & 1 & -2 & 0 \\ -4 & 8 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -9 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

Lösung:

1.) a)  $Ax = b$

$$\Leftrightarrow (L + D + R)x = b$$

$$\Leftrightarrow Dx + (L + R)x = b$$

$$\Leftrightarrow Dx = -(L + R)x + b$$

$$\Leftrightarrow x = -D^{-1}(L + R)x + D^{-1}b$$

b)  $x^{(m+1)} := -D^{-1}(L + R)x^{(m)} + D^{-1}b$

$$m = 0, 1, 2, \dots$$

2.)

a)  $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}, -D^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, L + R = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x^{(m+1)} = -D^{-1}(L + R)x^{(m)} + D^{-1}b$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} x^{(m)} + \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

b) Die Konvergenz ist gesichert.

A erfüllt Zeilensummenkriterium:  $2 < 4$ ,  $3 < 6$ .

A erfüllt Spaltensummenkriterium:  $3 < 4$ ,  $2 < 6$ .

(Angabe eines Kriteriums reicht)

$$c) x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix}$$

$$3.) A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$a) D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b) \mathbb{D}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad L+R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$-\mathbb{D}^{-1}(L+R) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$c) \begin{array}{l} 1 + 2 < 4 \quad w \\ 2 + 1 < 4 \quad w \\ 0 + 1 < 2 \quad w \end{array} \quad \begin{array}{l} A \text{ erfüllt das} \\ \text{Zeilensummenkriterium} \end{array}$$

$\Rightarrow$  GSV konvergiert.

$$3.) \quad A = \begin{pmatrix} 10 & 3 & 4 \\ -1 & 15 & 2 \\ 3 & -4 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} 3 + 4 < 10 \quad w \\ |-1| + 2 < 15 \quad w \\ 3 + |-4| < 12 \quad w \end{array} \quad \begin{array}{l} A \text{ erfüllt das} \\ \text{Zeilensummenkriterium} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} |-1| + 3 < 10 \quad w \\ 3 + |-4| < 15 \quad w \\ 4 + 2 < 12 \quad w \end{array} \quad \begin{array}{l} A \text{ erfüllt das} \\ \text{Spaltensummenkriterium} \end{array}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 2 + |-3| &< 1 & \text{f} \\ |-4| + 6 &< 5 & \text{f} \\ 7 + 8 &< 9 & \text{f} \end{aligned}$$

A erfüllt nicht das  
Zeilensummenkriterium

$$\begin{aligned} |-4| + 7 &< 1 & \text{f} \\ 2 + 8 &< 5 & \text{f} \\ |-3| + 6 &< 9 & \text{f} \end{aligned}$$

A erfüllt nicht das  
Spaltensummenkriterium

$$C = \begin{pmatrix} 9 & 1 & -2 & 0 \\ -4 & 8 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -9 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 1 + |-2| + 0 &< 9 & \text{w} \\ |-4| + 1 + 4 &< 8 & \text{f} \\ 0 + 1 + 3 &< |-9| & \text{w} \\ 2 + 0 + 1 &< 8 & \text{w} \end{aligned}$$

A erfüllt nicht das  
Zeilensummenkriterium

$$\begin{aligned} -4 + 0 + 2 &< 9 & \text{w} \\ 1 + 1 + 0 &< 8 & \text{w} \\ |-2| + 1 + 1 &< |-9| & \text{w} \\ 0 + 4 + 3 &< 8 & \text{w} \end{aligned}$$

A erfüllt das  
Spaltensummenkriterium