

KLAUSUR-Vorbereitung: LR-Zerlegung

Aufgabe: Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 6 & 1 & -10 \\ -2 & -7 & 8 \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie die LR-Zerlegung von A.

b) Lösen Sie damit das lineare Gleichungssystem

$$Ax = b \text{ für}$$

$$b = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 25 \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

$$a) \begin{array}{ccc|cc} 2 & -1 & -3 & | \cdot (-3) & | \cdot (+1) \\ 6 & 1 & -10 & \leftarrow & \\ \hline -2 & -7 & 8 & \leftarrow & \end{array}$$

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -3 & \\ 0 & 4 & -1 & | \cdot 2 \\ 0 & -8 & 5 & \leftarrow \end{array}$$

$$L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} 2 & -1 & -3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{array} \Bigg] = R$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = L \cdot R$$

$$b) \underbrace{LRx = b}_y : \quad \begin{array}{l} 1. \quad Ly = b \\ 2. \quad Rx = y \end{array}$$

$$b = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 25 \end{pmatrix} : \quad 1.) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 25 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} y_1 = 4 \\ y_2 = -13 \\ y_3 = 3 \end{array}$$

$$2.) \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -13 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 2 \\ x_2 = -3 \\ x_3 = 1 \end{array}$$

$$\text{Lösung } x = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} : 1.) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow y_1 = -2 \\ \Rightarrow y_2 = 3 \\ \Rightarrow y_3 = 3$$

$$2.) \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = 1 \\ \Rightarrow x_2 = 1 \\ \Rightarrow x_3 = 1$$

$$\text{Lösung } x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$