

KL A U S U R - Vorbereitung : Lineare Gleichungssysteme

1.) Die Summe zweier Zahlen beträgt 30. Multipliziert man die erste Zahl mit 8, die zweite mit 2, so ist die Summe der Produkte 90. Wie heißen die beiden Zahlen?

2.) Lösen Sie folgendes lineares Gleichungssystem unter Verwendung des Gaußschen Eliminationsverfahrens.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

3.) Zeigen Sie: Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}$$

ist unlösbar.

4.) Zeigen Sie: Das lineare Gleichungssystem

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 3$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4$$

$$3x_1 + 4x_2 + x_3 = 5$$

hat unendlich viele Lösungen.

Lösung

$$1.) \quad x_1 + x_2 = 30 \quad | \cdot (-8)$$

$$8x_1 + 2x_2 = 90 \quad \leftarrow$$

$$x_1 + x_2 = 30$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{x_1 = 5}}$$

$$-6x_2 = -150 \Rightarrow \underline{\underline{x_2 = 25}}$$

$$2.) \quad \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \end{array} \quad | \cdot (-2)$$

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 3 & 5 \end{array} \quad \leftarrow$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 1 \end{array} \quad | \cdot (-1)$$

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -3 & 1 \end{array} \quad \leftarrow$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{x_1 = 0}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{x_2 = 1}}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -5 & 0 \end{array} \Rightarrow \underline{\underline{x_3 = 0}}$$

Die Lösung lautet $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 0$

$$3.) \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & 6 \\ 2 & -4 & -2 & -6 \end{array} \begin{array}{l} | \cdot (-2) \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & -6 & -4 & -2 \end{array} \begin{array}{l} | \cdot 2 \\ \leftarrow \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}$$

$$0 \cdot x_3 = 6 \text{ unlösbar}$$

\Rightarrow das GLS ist unlösbar

$$4.) \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 5 \end{array} \begin{array}{l} | \cdot (-2) \quad | \cdot (-3) \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \end{array} \begin{array}{l} | \cdot (-2) \\ \leftarrow \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$0 \cdot x_3 = 0 \text{ für alle } x_3 \in \mathbb{R} \text{ erfüllt} \Rightarrow \text{unendl. viele Lösungen}$$