

# KLAUSSUR - Vorbereitung: Newton-Verfahren

Aufgabe 1: Berechnen Sie

$$\sqrt{5} = 2,23606797\dots$$

näherungsweise, indem Sie das Newton-Verfahren auf das Nullstellenproblem

$$f(x) = x^2 - 5 = 0$$

anwenden.

- Führen Sie zwei Iterationen mit dem Startwert  $x_0 = 2$  durch.
- Wieviele weitere Iterationsschritte sind etwa erforderlich, um 12 exakte Nachkommastellen zu berechnen?

Aufgabe 2: Berechnen Sie

$$\sqrt[5]{37} = 2,0589241\dots$$

näherungsweise.

- Wenden Sie das Newton-Verfahren auf die Funktion  $f(x) = x^5 - 37$  an. Führen Sie zwei Iterationen mit dem Startwert  $x_0 = 2$  durch.

6) Wieviele weitere Iterationsschritte sind etwa erforderlich, um 16 exakte Nachkommastellen zu berechnen?

# Lösung

## Aufgabe 1

a)  $f(x) = x^2 - 5$

$f'(x) = 2x$

Newton-Verfahren:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ &= x_n - \frac{x_n^2 - 5}{2x_n} \\ &= x_n - \frac{1}{2}x_n + \frac{5}{2} \frac{1}{x_n} \\ &= \frac{1}{2}x_n + \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{x_n}\end{aligned}$$

Startwert  $x_0 = 2$

Iteration  $x_1 = 1 + \frac{5}{4} = \frac{9}{4} = 2,25$

$x_2 = \frac{9}{8} + \frac{20}{18} = 2,236\bar{1}$

3 exakte Nachkommastellen

b) Pro Iterationschritt etwa Verdopplung der Stellen.

3. Schritt: etwa 6 exakte Nachkommastellen

4. " " 12 " "

Also etwa zwei weitere Iterationschritte erforderlich

(da  $f'(x) = 2x \neq 0$  für  $x > 0$ ).

# Lösung

## Aufgabe 2

a)  $f(x) = x^5 - 37$   
 $f'(x) = 5x^4$

Newton-Verfahren:

$$x_{m+1} = x_m - \frac{f(x_m)}{f'(x_m)} = x_m - \frac{x_m^5 - 37}{5x_m^4}$$

$$x_{m+1} = \frac{4x_m}{5} + \frac{37}{5x_m^4}$$

Startwert:  $x_0 = 2$

Iteration:  $x_1 = \frac{33}{16} = 2,0625$

$$x_2 = 2,0589365\dots$$

4 Nachkommastellen exakt

b) Pro Iterationschritt etwa Verdopplung der Stellen.

3. Schritt: etwa 8 exakte Nachkommastellen

4. " " 16 " "

Also etwa zwei weitere Iterationsschritte erforderlich  
(da  $f'(x) = 5x^4 \neq 0$  für  $x > 0$ ).