KLAUSUR – Vorbereitung: Fixpunkte

Aufgabe: Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) = -\frac{1}{5}x^2 + x + 1.$$

a) Zeigen Sie, dass f die zwei Fixpunkte $\pm\sqrt{5}$ hat. Welcher ist anziehend und welcher abstoßend?

b) Zeichnen Sie die Funktion f und die Winkelhalbierende auf dem Intervall $[0,3]$. Führen Sie grafisch die Fixpunktiteration $x_{n+1} = f(x_n)$ für $n=0$ und $n=1$ mit dem Startwert $x_0 = 1$ durch.

c) Führen Sie rechnerisch vier Fixpunktiterationen mit dem Startwert $x_0 = 1$ unter Verwendung von drei Nachkommastellen durch.

d) Begründen Sie, warum die Iterierten x_n gegen

$$\sqrt{5} = 2{,}2360\ldots$$

konvergieren. Tipp: Zeigen Sie $|f'(x)| \leq \frac{3}{5}$ für $x \in [1,3]$ und wenden Sie das Konvergenzkriterium an.

e) Leiten Sie aus der Ungleichung

$$|x_n - \sqrt{5}| \leq \frac{L^n}{1-L}|x_1 - x_0|$$

mit $L = \frac{3}{5} = 0{,}6$ eine Fehlerabschätzung für $|x_{10} - \sqrt{5}|$ her.

Lösung:

a) $f(\sqrt{5}) = -\frac{1}{5}(\sqrt{5})^2 + \sqrt{5} + 1 = \cancel{-\frac{1}{5} \cdot 5} + \sqrt{5} \cancel{+ 1} = \sqrt{5}$

$f(-\sqrt{5}) = -\frac{1}{5}(-\sqrt{5})^2 - \sqrt{5} + 1 = \cancel{-\frac{1}{5} \cdot 5} - \sqrt{5} \cancel{+ 1} = -\sqrt{5}$

$\Rightarrow \sqrt{5}$ und $-\sqrt{5}$ sind Fixpunkte

$f'(x) = -\frac{2}{5}x + 1$

$f'(\sqrt{5}) = -\frac{2}{5}\sqrt{5} + 1 = 0{,}105\ldots < 1 \Rightarrow \sqrt{5}$ anziehend

$f'(-\sqrt{5}) = -\frac{2}{5}(-\sqrt{5}) + 1 = 1{,}894\ldots > 1 \Rightarrow -\sqrt{5}$ abstoßend

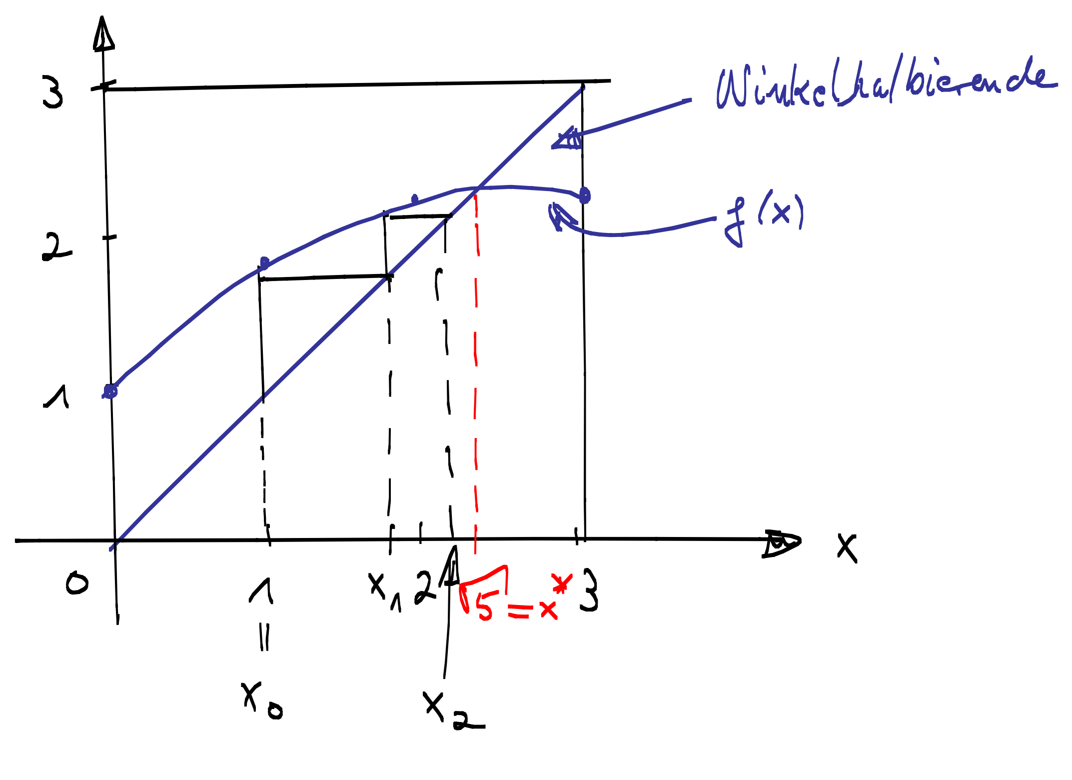
b) $f(x) = -\frac{1}{5}x^2 + x + 1.$

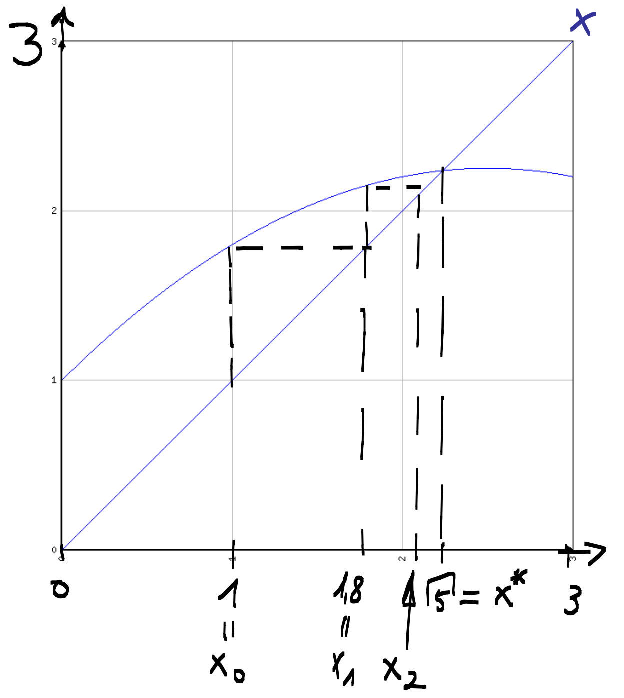
$f(0) = 1$

$f(1) = -\frac{1}{5} + 1 + 1 = \frac{9}{5} = 1{,}8$

$f(2) = -\frac{1}{5} \cdot 4 + 2 + 1 = 3 - \frac{4}{5} = 2{,}2$

$f(3) = -\frac{1}{5} \cdot 9 + 3 + 1 = 4 - \frac{9}{5} = 2{,}2$





c)

$$x_0 = 1$$
$$x_1 = f(1) = 1{,}8$$
$$x_2 = f(1{,}8) = 2{,}152$$
$$x_3 = f(2{,}152) = 2{,}225\ldots$$
$$x_4 = f(2{,}225\ldots) = 2{,}234\ldots, \quad \sqrt{5} = 2{,}2360\ldots$$

d) Konvergenzkriterium:

$$|f'(x)| = \left|-\tfrac{2}{5}x + 1\right|, \quad x \in [1,3]$$
$$f'(1) = \left|-\tfrac{2}{5}\cdot 1 + 1\right| = \frac{3}{5}$$
$$f'(3) = \left|-\tfrac{2}{5}\cdot 3 + 1\right| = \left|-\tfrac{1}{5}\right| = \frac{1}{5}$$

$$\Longrightarrow |f'(x)| \leq \frac{3}{5} < 1 \quad \text{für } x \in [1,3]$$

e) Fehlerabschätzung:

$$|x_n - \sqrt{5}| \leq \frac{(0{,}6)^n}{1-\frac{3}{5}} |x_1 - x_0|$$

$$= \frac{5}{2} \cdot (0{,}6)^n \, |1{,}8 - 1|$$

$$= 2{,}5 \cdot (0{,}6)^n \cdot 0{,}8$$

$$|x_{10} - \sqrt{5}| \leq 2{,}5 \cdot (0{,}6)^{10} \cdot 0{,}8$$

$$= 2 \cdot 0{,}00604\ldots$$

$$= 0{,}012\ldots$$