Übungen zur Mathematik 2

Lösungen Blatt 10

Aufgabe 1

a) $f(x) = x^5 - 37$

Sekanten – Verfahren :

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}(x_n^5 - 37) - x_n(x_{n-1}^5 - 37)}{x_n^5 - x_{n-1}^5}$$

Startwerte $x_0 = 2$ und $x_1 = 3$

Iteration :

n	x_n
0	2.0
1	3.0
2	2.023696682464455
3	2.0379812936402693
4	2.0596608001164167
5	2.058909002463697
6	2.0589241256526964

7 exakte Stellen

b) Pro Iterationschritt etwa 1,6 – Verfachung der Stellen.

7. Schritt: etwa 11 exakte Nachkommastellen

8. " " 17 " "

Also etwa zwei weitere Iterationsschritte erfordrlich.

c) Newton-Verfahren:

n	x_n
0	2.0
1	2.0625
2	2.058936514320937
3	2.0589241366273416
4	2.058924136478517

Das Newton-Verfahren liefert bereits für x_4 16 exakte Nachkommastellen.

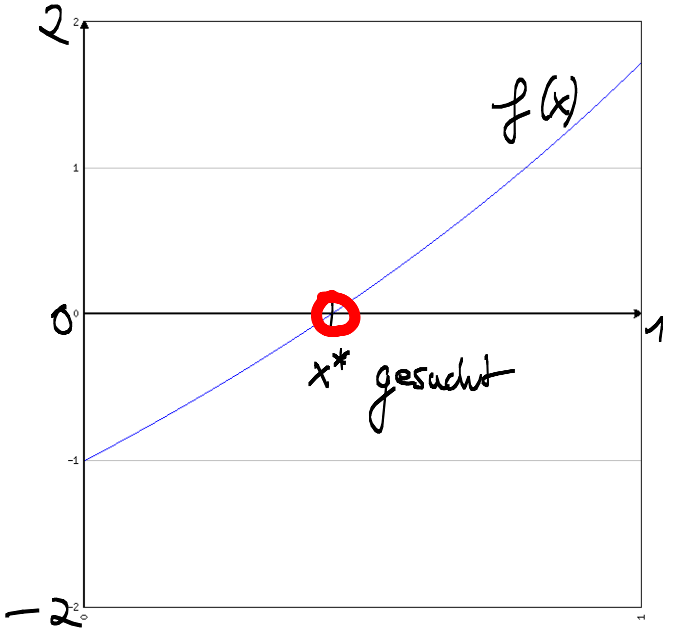
Aufgabe 2

$$f(x) = e^x + x - 2 \overset{!}{=} 0$$

$f(0) = -2 < 0$

$f(1) = e - 1 = 1{,}718\ldots$

$\Rightarrow$ f hat eine Nullstelle in $[0,1]$



Sekanten-Verfahren

$$x_{n+1} := \frac{x_{n-1}\left(e^{x_n} + \cancel{x_n} - 2\right) - x_n\left(e^{x_{n-1}} + \cancel{x_{n-1}} - 2\right)}{e^{x_n} + x_n - \left(e^{x_{n-1}} + x_{n-1}\right)}$$

$$= \frac{x_{n-1} e^{x_n} - x_n e^{x_{n-1}} + 2\left(x_n - x_{n-1}\right)}{e^{x_n} - e^{x_{n-1}} + x_n - x_{n-1}}$$

Startwerte $x_0 = 0$ und $x_1 = 1$

n	x_n
0	0.0
1	1.0
2	0.36787944117144233
3	0.4300563616528946
4	0.4431457539835317
5	0.44285326612742365
6	0.44285440009017152
7	0.4428544010023886
8	0.4428544010023886

keine Verbesserung

Für 16 exakte Nachkommastellen sind 6 Iterationen notwendig.

b) Newton-Verfahren:

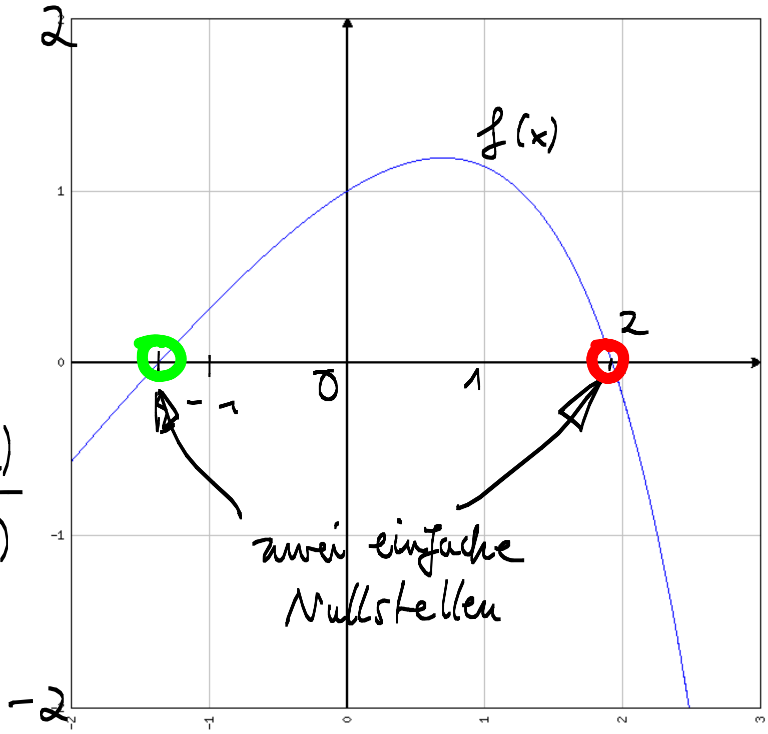
n	x_n	
0	1,0	
1	0.5378828427399902	
2	0.4456167485265453	2 Nachkommastellen exakt
3	0.442856724645 11	5 " "
4	0.4428544010040325	11 " "
5	0.4428544010023886	16 " "
6	0.4428544010023886	keine Verbesserung

Die 5. Iteration liefert 16 exakte Nachkommastellen.

Das Newton-Verfahren ist geringfügig besser als das Sekanten-Verfahren.

Aufgabe 3

$$f(x) = x + \frac{1}{2}(3 - e^x)$$



Sekanten-Verfahren

$$x_{n+1} := \frac{x_{n-1} f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

Startwerte: $x_0 = 1{,}5$, $x_1 = 2$

n	x_n
0	1.5
1	2.0
2	1.8980122616417123
3	1.9225720335969771
4	1.923964033608624
5	1.9239387259282623
6	1.9239387503454435
7	1.9239387503458796
8	1.9239387503458796

← 16 exakte Nachkommastellen

Startwerte: $x_0 = -1{,}5$, $x_1 = -1$

Iterationstabelle:

n	x_n
0	-1.5
1	-1.0
2	-1.3695527783856596
3	-1.37349608343
4	-1.3733745116294598
5	-1.3733745453516468
6	-1.373374545351944
7	-1.373374545351944

← 16 exakte Nachkommastellen

b) Newton-Verfahren

n		
0	1,5	
1	2.1118054625816223	
2	1.9458288754394473	1 exakte Nachkommastelle
3	1.9242717513178611	2 " "
4	1.9239388286451107	6 " "
5	1.9239387503458838	13 " "
6	1.9239387503458796	16 " "
7	9239387503458796 1.	kein Verbesserung

Startwert $x_0 = -1$

n		
0	-1,0	
1	-1.3873001632197179	1 exakte Nachkommastelle
2	-1.3733884455187348	4 " "
3	-1.3733745453659503	10 " "
4	-1.3733745453519439	16 " "
5	-1.3733745453519439	keine Verbesserung

Das Newton-Verfahren ist geringfügig besser als das Sekanten-Verfahren.