Übungen zur Mathematik 2

Lösungen Blatt 3

Aufgabe 1

$$I = \int_0^2 (x+1)\ln(x+1)\,dx$$

a) $$\int \underbrace{(x+1)}_{u'} \underbrace{\ln(x+1)}_{v}\,dx$$

$$= \underbrace{\tfrac{1}{2}(x+1)^2}_{u} \underbrace{\ln(x+1)}_{v} - \int \underbrace{\tfrac{1}{2}(x+1)^{\cancel{2}}}_{u} \cdot \underbrace{\frac{1}{\cancel{x+1}}}_{v'}\,dx$$

$$= \tfrac{1}{2}(x+1)^2 \ln(x+1) - \left(\tfrac{1}{4}x^2 + \tfrac{1}{2}x\right) + C$$

$$\Rightarrow I = \left[\tfrac{1}{2}(x+1)^2 \ln(x+1) - \tfrac{1}{4}x^2 - \tfrac{1}{2}x\right]_0^2$$

$$= \tfrac{9}{2}\ln 3 - 2 = \underline{\underline{2{,}943755\ldots}}$$

b) Simpson-Formel / Keplersche Fassregel:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4\cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)$$

$$\int_0^2 (x+1)\ln(x+1)\,dx \approx \frac{2}{6}\left(f(0) + 4f(1) + f(2)\right)$$

$$= \tfrac{1}{3}\left(0 + 4\cdot 2\ln 2 + 3\cdot\ln 3\right)$$

$$= \underline{\underline{2{,}9470\ldots}}$$

c) Fehler: $2{,}9470\ldots - 2{,}9437\ldots = \underline{\underline{0{,}003249\ldots}}$

Aufgabe 2

$f: [0, \pi] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x \cdot \sin(x)$

Wir bestimmen zunächst die Funktionswerte von f für $x_k = k \cdot \frac{\pi}{8}$ für $k = 0, \dots, 8$:

$$f(0) = 0$$
$$f\left(\frac{\pi}{8}\right) = 0{,}150279\dots$$
$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0{,}555360\dots$$
$$f\left(\frac{3}{8}\pi\right) = 1{,}088420\dots$$
$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1{,}570796\dots$$
$$f\left(\frac{5}{8}\pi\right) = 1{,}814033\dots$$
$$f\left(\frac{3}{4}\pi\right) = 1{,}666081\dots$$
$$f\left(\frac{7}{8}\pi\right) = 1{,}051956\dots$$
$$f(\pi) = 0$$

Summierte Simpson-Formel:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6n}\Big(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \dots + 2f(x_{2n-2}) + 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n})\Big)$$

$n=2$:

$$\int_0^{\pi} x\sin(x)\,dx \approx \frac{\pi}{12}\Big(0+4\cdot 0{,}555360\ldots+2\cdot 1{,}570706\ldots+ 4\cdot 1{,}666081\ldots+0\Big)$$

$$=3{,}148754\ldots$$

$n=4$:

$$\int_0^{\pi} x\sin(x)\,dx \approx \frac{\pi}{24}\Big(0+4\cdot 0{,}150279\ldots+2\cdot 0{,}555360\ldots+ 4\cdot 1{,}088420\ldots+2\cdot 1{,}570706\ldots+ 4\cdot 1{,}814033\ldots+2\cdot 1{,}666081\ldots+ 4\cdot 1{,}051956\ldots+0\Big)$$

$$=3{,}142015\ldots$$

Exakte Berechnung:

$$\int \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{v'}\, dx = \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{(-\cos(x))}_{v} - \underbrace{\int \underbrace{1}_{u'} \cdot \underbrace{(-\cos(x))}_{v}\, dx}_{-\sin(x)+C}$$

$$\int_0^{\pi} x \cdot \sin(x)\, dx = \Big[-x \cdot \cos(x) + \sin(x)\Big]_0^{\pi}$$

$$= -\pi \cdot \underbrace{\cos(\pi)}_{-1} + 0 - 0$$

$$= \underline{\underline{\pi}} = 3{,}14159\ldots$$

Tatsächliche Fehler:

$$I - S_4 = \pi - 3{,}148754\ldots = -0{,}007161\ldots$$

$$I - S_8 = \pi - 3{,}142015\ldots = -0{,}000422\ldots$$

Der Vergleich zeigt deutlich die Überlegenheit der summierten Simpson-Formel.