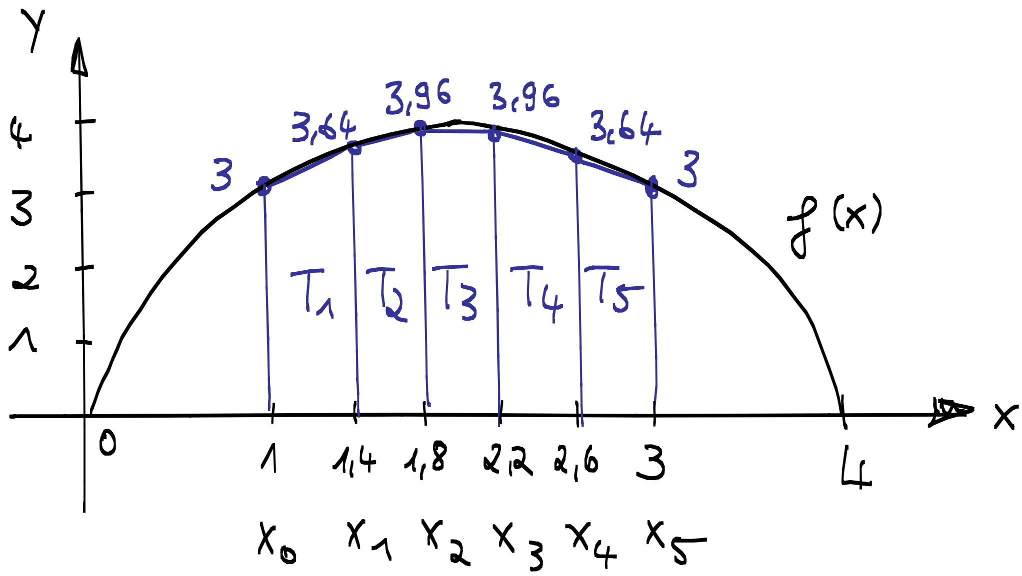
Übungen zur Mathematik 2
Lösungen Blatt 2

Aufgabe 1

$$I = \int_1^3 \underbrace{(-x^2 + 4x)}_{f(x)} \, dx$$

a)



Schrittweite $h = \frac{x_5 - x_0}{5} = \frac{2}{5} = 0{,}4$

$$T_1 = \frac{3 + 3{,}64}{2} \cdot 0{,}4 = 1{,}328$$

$$T_2 = \frac{3{,}64 + 3{,}96}{2} \cdot 0{,}4 = 1{,}52$$

$$T_3 = \frac{3{,}96 + 3{,}96}{2} \cdot 0{,}4 = 1{,}584$$

$$T_4 = \frac{3{,}96 + 3{,}64}{2} \cdot 0{,}4 = 1{,}52$$

$$T_5 = \frac{3{,}64 + 3}{2} \cdot 0{,}4 = 1{,}328$$

$T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5$

$= \underline{\underline{7{,}28}}$

b) Summierte Trapezformel ($n = 5$)

$$\int_1^3 \underbrace{(-x^2+4x)}_{f(x)}\,dx$$

$$\approx \frac{2}{5}\left(\frac{1}{2}f(1)+f(1{,}4)+f(1{,}8)+f(2{,}2)+f(2{,}6)+\frac{1}{2}f(3)\right)$$

$$=\frac{2}{5}\left(\frac{3}{2}+3{,}64+3{,}96+3{,}96+3{,}64+\frac{3}{2}\right)$$

$$=\frac{2}{5}\cdot 18{,}2 = \underline{\underline{7{,}28}}$$

c) $$I=\int_1^3 (-x^2+4x)\,dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2\right]_1^3$$

$$= -9+18-\left(-\frac{1}{3}+2\right)$$

$$= 7\frac{1}{3} = 7{,}\overline{3}$$

Absoluter Fehler: $7\frac{1}{3}-7{,}28 = 0{,}05\overline{3}$

Relativer Fehler: $\dfrac{7\frac{1}{3}-7{,}28}{7\frac{1}{3}} = 0{,}00\overline{72}$

$\hat{=}$ ca. 0,7 %

Aufgabe 2

$$f(x) = -x^2 + 4x$$

$$f'(x) = -2x + 4$$

$$f''(x) = -2$$

Es gilt

$$|I - T_n| \leq \frac{(\overbrace{b-a}^{=2})^3}{12n^2} \cdot \max_{x \in [a,b]} \underbrace{|f''(x)|}_{2}$$

$$= \frac{2^3}{12n^2} \cdot 2$$

$$= \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{n^2} \overset{!}{\leq} 10^{-3}$$

Also muss

$$\frac{4}{3} \cdot 1000 \leq n^2$$

bzw.

$$\underbrace{\sqrt{\frac{4}{3} \cdot 1000}}_{36{,}5\ldots} \leq n$$

erfüllt sein. Dies ist der Fall für $n \geq 37$

Ergebnis: 37 Unterteilungen sind notwendig, um einen Fehler $< 10^{-3}$ durch die summierte Trapezformel zu erreichen.

Aufgabe 3

$f: [0,\pi] \to \mathbb{R}, \; f(x) = x \cdot \sin(x)$

Wir bestimmen zunächst die Funktionswerte von f für $x_k = k \cdot \frac{\pi}{8}$ für $k = 0, \dots, 8$:

$$f(0) = 0$$
$$f\left(\frac{\pi}{8}\right) = 0{,}150279\dots$$
$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0{,}555360\dots$$
$$f\left(\frac{3}{8}\pi\right) = 1{,}088420\dots$$
$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1{,}570796\dots$$
$$f\left(\frac{5}{8}\pi\right) = 1{,}814033\dots$$
$$f\left(\frac{3}{4}\pi\right) = 1{,}666081\dots$$
$$f\left(\frac{7}{8}\pi\right) = 1{,}051956\dots$$
$$f(\pi) = 0$$

Summierte Trapezformel:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\underbrace{\frac{f(x_0)}{2}}_{\text{Halbierung}} + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1}) + \underbrace{\frac{f(x_n)}{2}}_{\text{Halbierung}} \right)$$

$n = 4$:

$$\int_0^{\pi} x \sin(x)\, dx \approx \frac{\pi}{4}\left(\frac{0}{2} + 0{,}555360... + 1{,}570706... + 1{,}666081 + \frac{0}{2} \right)$$

$$= 2{,}978416...$$

$n = 8$:

$$\int_0^{\pi} x \sin(x)\, dx \approx \frac{\pi}{8}\left(\frac{0}{2} + 0{,}150279... + 0{,}555360... + 1{,}088420... + 1{,}570706... + 1{,}814033... + 1{,}666081... + 1{,}051956... + \frac{0}{2} \right)$$

$$= 3{,}101115...$$

Exakte Berechnung:

$$\int \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{v'}\, dx = \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{(-\cos(x))}_{v} - \underbrace{\int \underbrace{1}_{u'} \cdot \underbrace{(-\cos(x))}_{v} dx}_{-\sin(x)+C}$$

$$\int_0^{\pi} x \cdot \sin(x)\, dx = \left[-x \cdot \cos(x) + \sin(x) \right]_0^{\pi}$$

$$= -\pi \cdot \underbrace{\cos(\pi)}_{-1} + 0 - 0$$

$$= \underline{\underline{\pi}} = 3{,}14159\ldots$$

Tatsächliche Fehler:

$$\underline{I} - T_4 = \pi - 2{,}978416\ldots = 0{,}163176\ldots$$
$$I - T_8 = \pi - 3{,}101115\ldots = 0{,}040477\ldots$$

$$\underline{I} - S_4 = \pi - 3{,}148754\ldots = -0{,}007161\ldots$$
$$I - S_8 = \pi - 3{,}142015\ldots = -0{,}000422\ldots$$

Der Vergleich zeigt deutlich die Überlegenheit der summierten Simpson-Formel.