

Übungen zur Mathematik 2
Lösungen Blatt 9

Aufgabe 1

a) $f(x) = x^5 - 37$
 $f'(x) = 5x^4$

Newton-Verfahren:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^5 - 37}{5x_n^4}$$

$$x_{n+1} = \frac{4x_n}{5} + \frac{37}{5x_n^4}$$

Startwert: $x_0 = 2$

Iteration: $x_1 = \frac{33}{16} = 2,0625$

$$x_2 = 2,0589365\dots$$

4 Nachkommastellen exakt

b) Pro Iterationsschritt etwa Verdopplung der Stellen.

3. Schritt: etwa 8 exakte Nachkommastellen

4. " " 16 " "

Also etwa zwei weitere Iterationsschritte erforderlich.

Aufgabe 2

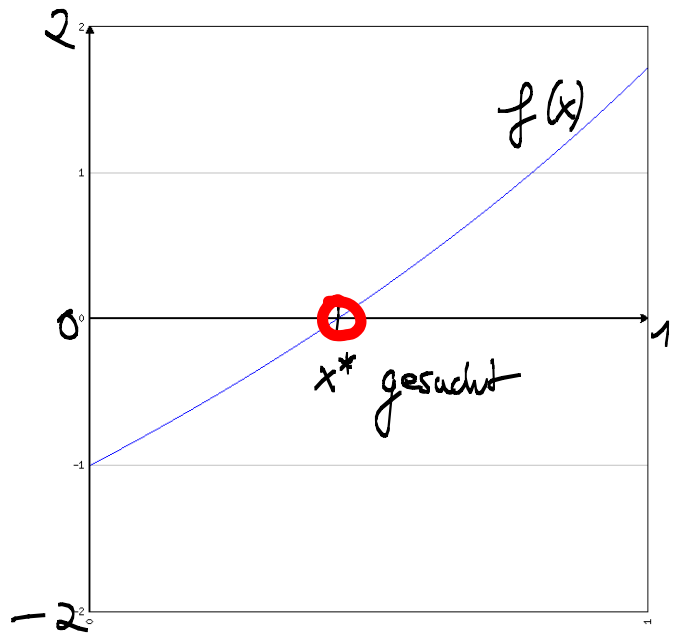
$$f(x) = e^x + x - 2 \stackrel{!}{=} 0$$

$$f'(x) = e^x + 1$$

$$f(0) = -2 < 0$$

$$f(1) = e - 1 = 1,718\dots$$

$\Rightarrow f$ hat eine Nullstelle
in $[0, 1]$



$f'(x) = e^x + 1 \neq 0 \Rightarrow$ Nullstelle in $[0, 1]$ einfach

Startwert $x_0 := 1$

$$\text{Newton-Iteration: } x_{m+1} := x_m - \frac{e^{x_m} + x_m - 2}{e^{x_m} + 1}$$

$$m = 0, 1, 2, \dots$$

m	x_m		
0	1,0		
1	0.5378828427399902		
2	0.4456167485265453	2	Nachkommastellen exakt
3	0.44285672464511	5	" "
4	0.4428544010040325	11	" "
5	0.4428544010023886	16	" "
6	0.4428544010023886		keine Verbesserung

Die (5) Iteration liefert 16 exakte Nachkommastellen.

Aufgabe 3

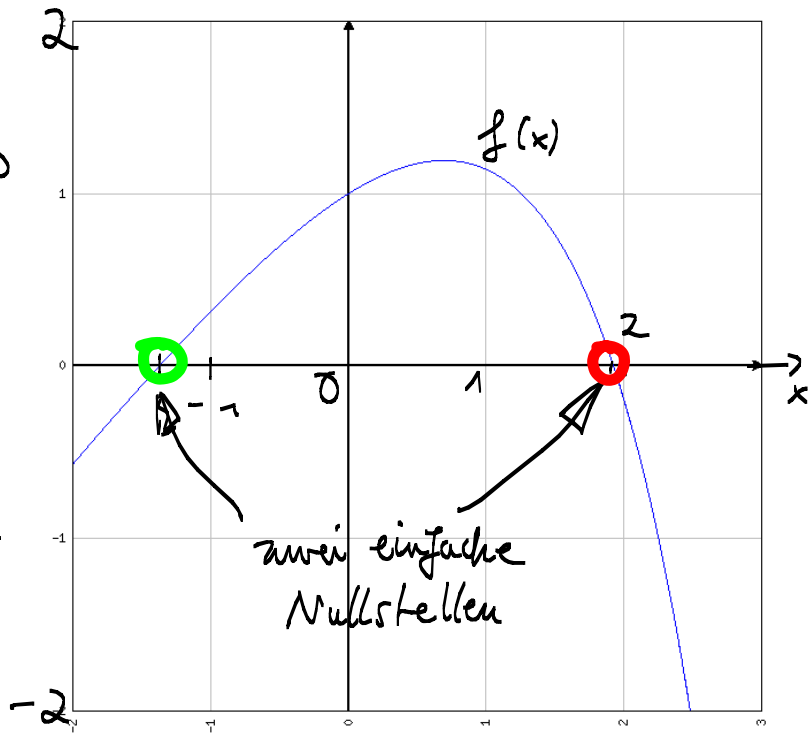
$$f(x) = x + \frac{1}{2}(3 - e^x) \stackrel{!}{=} 0$$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{2}e^x$$

Newton-Iteration

$$x_{m+1} = x_m - \frac{2x_m + 3 - e^{x_m}}{2 - e^{x_m}}$$

$m = 1, 2, \dots$



Startwert $x_0 = 1,5$

m	
0	1,5
1	2.1118054625816223
2	1.9458288754394473
3	1.9242717513178611
4	1.9239388286451107
5	1.9239387503458838
6	1.9239387503458796
7	9239387503458796

1 exakte Nachkommastelle

2 " "

6 " "

13 " "

16 " "

kein Verbesserung

Startwert $x_0 = -1$

m	
0	-1,0
1	-1.3873001632197179
2	-1.3733884455187348
3	-1.3733745453659503
4	-1.3733745453519439
5	-1.3733745453519439

1 exakte Nachkommastelle

4 " "

10 " "

16 " "

keine Verbesserung