Übungen zur Mathematik 2

Lösungen Bogenlänge

Aufgabe 1

$f,g: [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(t) = t - \sin(t)$, $g(t) = 1 - \cos(t)$

$\varphi(2\pi) = \begin{pmatrix} f(2\pi) \\ g(2\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\pi - 0 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\pi \\ 0 \end{pmatrix}$ berührt die x-Achse

Wenn t das Intervall $[0,2\pi]$ durchläuft, hat das Rad eine Umdrehung zurückgelegt.

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2}\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{(1-\cos(t))^2 + \sin^2(t)}\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\cos(t) + \underbrace{\cos^2(t) + \sin^2(t)}_{=1}}\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2\,\underbrace{(1-\cos(t))}_{2\sin^2(\frac{t}{2})}}\, dt$$

$$= 2\int_0^{2\pi} \sin\left(\tfrac{t}{2}\right) dt$$

$$= 2\left[2\left(-\cos\left(\tfrac{t}{2}\right)\right)\right]_0^{2\pi}$$

$$= 4\left(-\underbrace{\cos(\pi)}_{-1} - \left(\underbrace{-\cos(0)}_{-1}\right)\right) = \underline{\underline{8}}$$

Das Ventil legt also während einer Umdrehung des Rades das Achtfache des Reifenradius als Strecke zurück.

Aufgabe 2

$\varphi: \left[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right] \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(t) = \begin{pmatrix} 3t^2 - 1 \\ 3t^3 - t \end{pmatrix}$

$$L = \int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \sqrt{(6t)^2 + (9t^2-1)^2}\, dt$$

$$= \int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \sqrt{36t^2 + 81t^4 - 18t^2 + 1}\, dt$$

$81t^4 + 18t^2 + 1 = (9t^2+1)^2$

$$= \int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} (9t^2+1)\, dt = \left[3t^3 + t\right]_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$= 3\left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 + \tfrac{1}{\sqrt{3}} - \left(-\left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 - \tfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= 2\cdot\left(3\left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 + \tfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

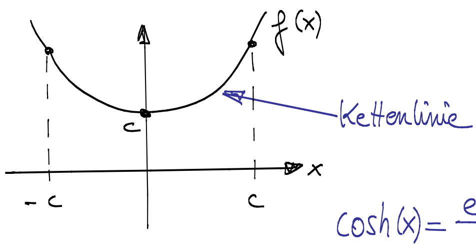
$$= 2\,\Big(\underbrace{3\left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}_{2}\Big)\cdot\tfrac{1}{\sqrt{3}}$$

$$= \underline{\underline{\frac{4}{\sqrt{3}}}} = 2{,}3094\ldots$$

Aufgabe 3

$f: [-c,c] \to \mathbb{R}$, $f(x) = c\cdot\cosh\left(\frac{x}{c}\right)$

mit einer Konstanten $c > 0$.



$\cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

$f'(x) = c\cdot\sinh\left(\frac{x}{c}\right)\cdot\frac{1}{c} = \sinh\left(\frac{x}{c}\right)$

Berechnung der Bogenlänge:

$$L = \int_{-c}^{c} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

$$= \int_{-c}^{c} \sqrt{\underbrace{1 + \sinh^2\left(\tfrac{x}{c}\right)}_{\cosh^2(\frac{x}{c})}}\, dx$$

$$= \int_{-c}^{c} \cosh\left(\tfrac{x}{c}\right) dx$$

$$= 2\cdot\int_0^{c} \cosh\left(\tfrac{x}{c}\right) dx$$ wegen der Symmetrie

$$= 2\cdot\left[c\cdot\sinh\left(\tfrac{x}{c}\right)\right]_0^c$$

$$= 2c\,\big(\sinh(1) - \underbrace{\sinh(0)}_{=0}\big)$$

$$= \cancel{2}c\,\frac{e^1 - e^{-1}}{\cancel{2}}$$

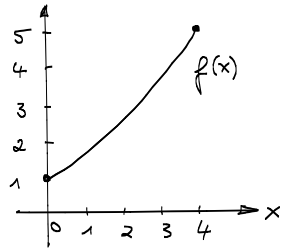
$\sinh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

$$= c\cdot\left(e - \tfrac{1}{e}\right)$$

$$= \underline{\underline{2{,}35\ldots\cdot c}}$$

Aufgabe 4

$f : [0,4] \to \mathbb{R}, \; f(x) = \frac{1}{2} x \sqrt{x} + 1$



$f'(x) = \left(\frac{1}{2} x^{\frac{3}{2}} + 1\right)' = \frac{3}{4} x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{4}\sqrt{x}$

Bogenlänge:

$$L = \int_0^4 \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

$$= \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{16} x}\, dx$$

$$= \frac{16}{9} \frac{1}{\frac{3}{2}} \left[\left(1 + \frac{9}{16} x\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^4$$

$$= \frac{16}{9} \cdot \frac{2}{3} \left(\left(1 + \frac{9}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right) = \underline{\underline{5{,}7588\ldots}}$$