Übungen zur Mathematik 2

Lösungen Bernstein-Polynome

Aufgabe 1

a) $B_k^n(t) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}$, $k = 0, \dots, n$

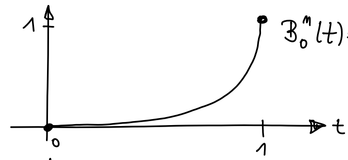
$B_0^n(t) = (1-t)^n$

$B_1^n(t) = n \cdot t(1-t)^{n-1}$

$B_2^n(t) = \underbrace{\binom{n}{2}}_{\frac{n\cdot(n-1)}{2}} \cdot t^2 (1-t)^{n-2}$

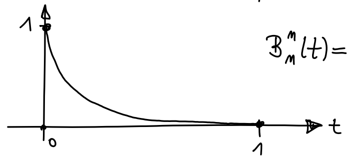
n \ k	0	1	2	3	4
0	1				
1	$1-t$				
2	$(1-t)^2$	$2t(1-t)$			
3	$(1-t)^3$	$3t(1-t)^2$	$3t^2(1-t)$	t^3	
4	$(1-t)^4$	$4t(1-t)^3$	$6t^2(1-t)^2$	$4t^3(1-t)$	t^4

b)



$B_0^n(t) = (1-t)^n$, $B_0^n(0) = 1$

$B_0^n(1) = 0$



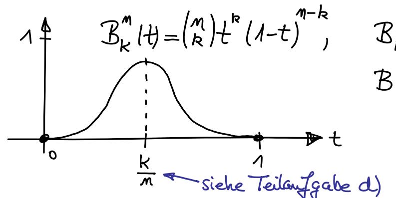
$B_n^n(t) = t^n$, $B_n^n(0) = 1$

$B_n^n(1) = 0$

$0 < k < n$

$B_k^n(t) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}$, $B_k^n(0) = 0$

$B_k^n(1) = 0$



c) $1 = ((1-t)+t)^2 = \underbrace{(1-t)^2} + \underbrace{2t(1-t)} + \underbrace{t^2}$

$= B_0^2(t) + B_1^2(t) + B_2^2(t)$

$1 = ((1-t)+t)^3 = \underbrace{(1-t)^3} + \underbrace{3t(1-t)^2} + \underbrace{3t^2(1-t)} + \underbrace{t^3}$

$= B_0^3(t) + B_1^3(t) + B_2^3(t) + B_3^3(t)$

$1 = ((1-t)+t)^4 = \underbrace{(1-t)^4} + \underbrace{4t(1-t)^3} + \underbrace{6t^2(1-t)^2} + \underbrace{4t^3(1-t)} + \underbrace{t^4}$

$= B_0^4(t) + B_1^4(t) + B_2^4(t) + B_3^4(t) + B_4^4(t)$

d) $B_0^n(t) = (1-t)^n$ nimmt das Maximum an für $t = 0 = \frac{0}{n}$.

$B_n^n(t) = t^n$ nimmt das Maximum an für $t = 1 = \frac{n}{n}$.

Sei nun $0 < k < n$. Dann gilt

$(B_k^n(t))' = \left(\binom{n}{k} t^k \cdot (1-t)^{n-k}\right)'$

$= \binom{n}{k} \cdot \left\{ k t^{k-1} (1-t)^{n-k} - t^k (n-k)(1-t)^{n-k-1} \right\}$

Produktregel

Also gilt:

$(B_k^n(t))' = 0$

$\Leftrightarrow \; k t^{k-1}(1-t)^{n-k} - t^k (n-k)(1-t)^{n-k-1} = 0 \quad | : t^{k-1}$

$\Leftrightarrow \; k(1-t)^{n-k} - (n-k) t (1-t)^{n-k-1} = 0 \quad | : t^{n-k-1}$

$\Leftrightarrow \; k(1-t) - (n-k)t = 0$

$\Leftrightarrow \; k - \cancel{kt} - nt + \cancel{kt} = 0$

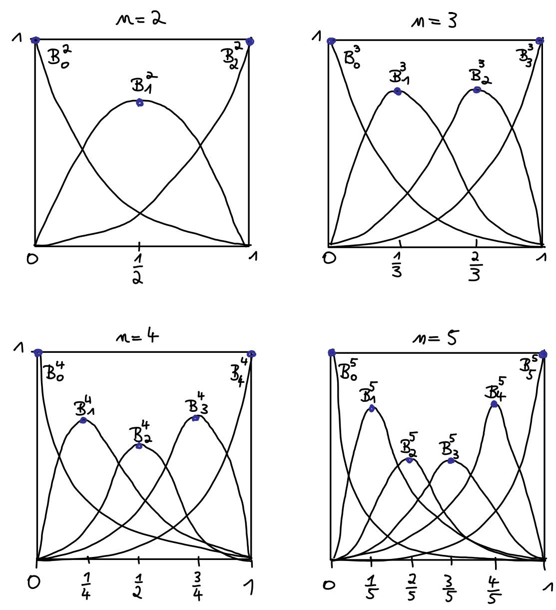
$\Leftrightarrow \; k - nt = 0$

$\Leftrightarrow \; k = nt \quad | : n$

$\Leftrightarrow \; \underline{\underline{t = \frac{k}{n}}}$

$(B_k^n(t))'$ hat genau eine genau eine Nullstelle in $t = \frac{k}{n}$. Wegen des Verlaufs (s.o.) nimmt B_k^n dort das Maximum an.

e)



f) $B_k^n(t)$, $t \in [0,1]$, nimmt das Maximum an für $t = \frac{k}{n}$ (siehe Grafiken).

g) $(1-t) \cdot B_k^{n-1}(t) + t \cdot B_{k-1}^{n-1}(t)$

$= (1-t)\binom{n-1}{k} t^k (1-t)^{n-1-k} + t \cdot \binom{n-1}{k-1} t^{k-1} (1-t)^{n-1-(k-1)}$

$= \binom{n-1}{k} t^k (1-t)^{n-k} + \binom{n-1}{k-1} t^k (1-t)^{n-k}$

$= \left(\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}\right) t^k (1-t)^{n-k}$

$= \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} = B_n^k(t)$