KLAUSUR-Vorbereitung: Numerische Integration

1.) Geben Sie die Rechteckformel und Trapezformel zur näherungsweisen Berechnung von $\int_a^b f(x)\,dx$ an.

2.) Wie lautet die summierte Trapezformel für eine äquidistante Zerlegung des Intervalls $[a,b]$?

3.) Man berechne $\int_a^b f(x)\,dx$ näherungsweise durch die Trapezformel und summierte Trapezformel.
Stellen Sie die Trapeze grafisch dar, und berechnen Sie den exakten Wert, den absoluten und relativen Fehler.

a) $f: [0,1] \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2,\ n = 4,$
b) $f: [1,3] \to \mathbb{R},\ f(x) = -x^2 + 4x,\ n = 5,$
c) $f: [1,5] \to \mathbb{R},\ f(x) = -x^2 + 6x,\ n = 4.$

4.) Berechnen Sie $\int_0^\pi \sin(x)\,dx$ näherungsweise durch die summierte Trapezformel mit äquidistanter Zerlegung in vier Teilintervalle ($n = 4$).

5.) Berechnen Sie $\int_0^\pi \sin(x)\,dx$ näherungsweise durch die summierte Simpson-Formel mit äquidistanter Zerlegung in zwei Teilintervalle ($n=2$). Hinweis:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6n}\Big(f(x_0) + 4 \cdot f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \dots + 2f(x_{2n-2}) + 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n})\Big)$$

Lösung

1.) $\int_a^b f(x)\,dx \approx (b-a)\cdot f(a)$ Rechteckformel

$\int_a^b f(x)\,dx \approx (b-a)\,\frac{f(a)+f(b)}{2}$ Trapezformel

2.) $\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(x_0)}{2}+f(x_1)+\ldots+f(x_{n-1})+\frac{f(x_n)}{2}\right)$

Summierte Trapezformel

mit $x_k := a + k\cdot\frac{b-a}{n}$ für $k=0,1,\ldots,n$.

3.) a) $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$, $n=4$

Trapezformel: $\int_0^1 x^2\,dx \approx (1-0)\cdot\frac{1^2+0^2}{2} = \frac{1}{2}$

Exakter Wert: $\int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}$

Absoluter Fehler: $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

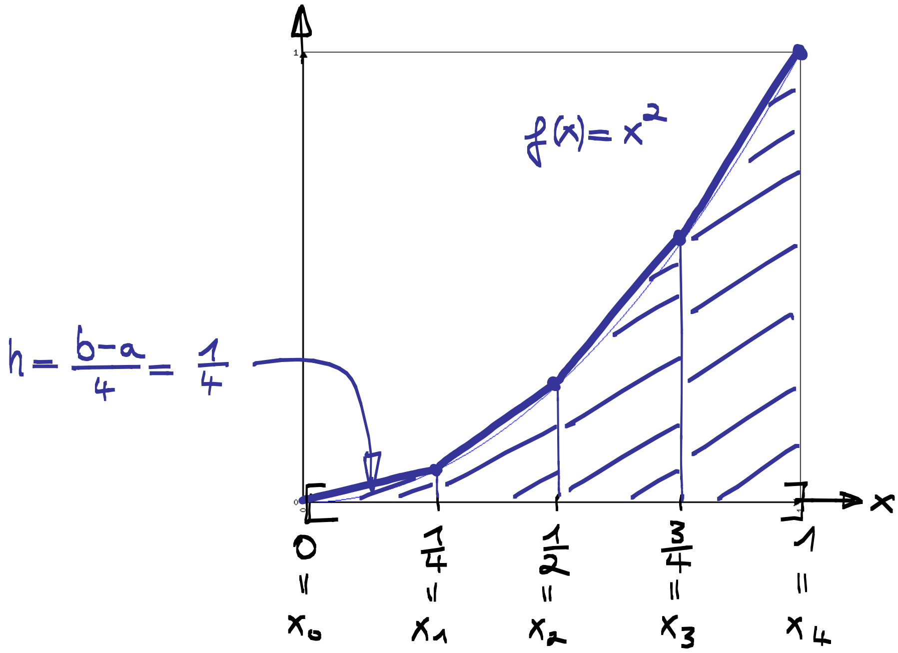
Relativer Fehler $= \frac{\text{absoluter Fehler}}{\text{exakter Wert}}$

$$= \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Äquidistante Zerlegung von $[0,1]$ für $n=4$ liefert

$x_k = 0 + k \cdot \frac{1}{4}$ für $k = 0,1,2,3,4$ bzw.

$x_0 = 0,\ x_1 = \frac{1}{4},\ x_2 = \frac{1}{2},\ x_3 = \frac{3}{4},\ x_4 = 1.$



Summierte Trapezformel:

$$\int_0^1 x^2\,dx \approx \frac{1}{4}\left(\frac{0^2}{2} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1^2}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{16} + \frac{1}{4} + \frac{9}{16} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}\,\frac{1+4+9+8}{16}$$

$$= \frac{11}{32} = 0{,}34375$$

Exakter Wert: $\int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3} = 0{,}\overline{3}.$

Absoluter Fehler: $\frac{11}{32} - \frac{1}{3} = \frac{33-32}{32 \cdot 3} = \frac{1}{96} = 0{,}0104\ldots$

Relativer Fehler: $\frac{\frac{1}{96}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{96} = \frac{1}{32} = 0{,}03125$

b) $f: [1,3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 + 4x$, $n = 5$,

Trapezformel: $\int_1^3 (-x^2+4x)\,dx \approx \cancel{(3-1)}\,\frac{3+3}{\cancel{2}} = 6$

Exakter Wert: $\int_1^3 (-x^2+4x)\,dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2\right]_1^3$

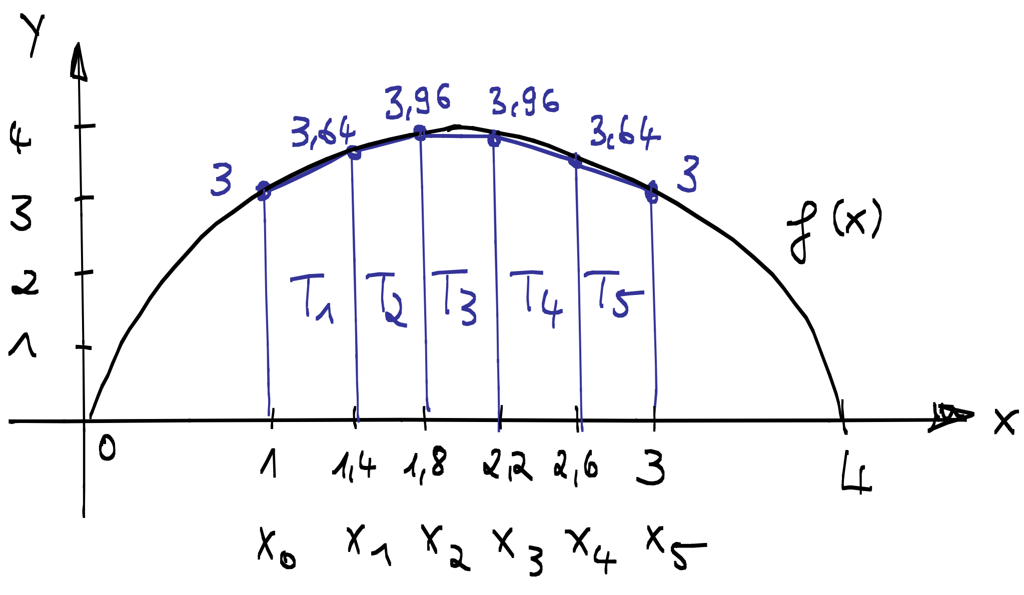
$= -9 + 18 - \left(-\frac{1}{3} + 2\right) = 7\frac{1}{3} = \frac{22}{3}$

Absoluter Fehler: $6 - 7\frac{1}{3} = -\frac{4}{3}$ oder $7\frac{1}{3} - 6 = \frac{4}{3}$

Relativer Fehler $= \dfrac{\text{absoluter Fehler}}{\text{exakter Wert}}$

$= \dfrac{-\frac{4}{3}}{\frac{22}{3}} = -\frac{4}{22} = -\frac{2}{11}$ oder $\frac{2}{11}$

Äquidistante Zerlegung von $[1,3]$ für $n=5$ liefert
$x_k = 1 + k \cdot \frac{3-1}{5} = 1 + k \cdot \frac{2}{5}$ für $k = 0,1,2,3,4,5$ bzw.
$x_0 = 1$, $x_1 = 1{,}4$, $x_2 = 1{,}8$, $x_3 = 2{,}2$, $x_4 = 2{,}6$, $x_5 = 3$



Summierte Trapezformel

$$\int_1^3 (-x^2+4x)\,dx$$

$$\approx \frac{2}{5}\left(\frac{1}{2}f(1)+f(1{,}4)+f(1{,}8)+f(2{,}2)+f(2{,}6)+\frac{1}{2}f(3)\right)$$

$$= \frac{2}{5}\left(\frac{3}{2}+3{,}64+3{,}96+3{,}96+3{,}64+\frac{3}{2}\right)$$

$$= \frac{2}{5}\cdot 18{,}2 = \underline{\underline{7{,}28}}$$

Exakter Wert: $\int_1^3 (-x^2+4x)\,dx = 7\frac{1}{3} = 7{,}\overline{3}$

Rechnung siehe oben

Absoluter Fehler: $7\frac{1}{3} - 7{,}28 = 0{,}05\overline{3}$

Relativer Fehler: $\dfrac{7\frac{1}{3}-7{,}28}{7\frac{1}{3}} = 0{,}00\overline{72}$

$\hat{=}$ ca. $0{,}7\,\%$

c.) Trapezformel:

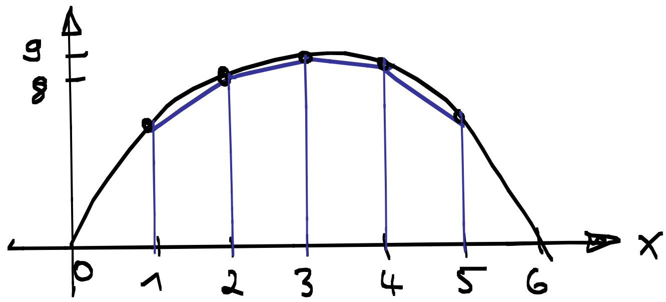
$$\int_1^5 (-x^2+6x)\,dx = 4\cdot\frac{5+5}{2} = \underline{\underline{20}}$$

Summierte Trapezformel:

$$\int_1^5 (-x^2+6x)\,dx$$

$$\approx \frac{5-1}{4}\left(\frac{f(1)}{2}+f(2)+f(3)+f(4)+\frac{f(5)}{2}\right)$$

$$= \frac{5}{2}+8+9+8+\frac{5}{2} = \underline{\underline{30}}$$



Eakter Wert:

$$\int_1^5 (-x^2+6x)\,dx = \left[-\frac{1}{3}x^3+3x^2\right]_1^5 = -\frac{125}{3}+75-\left(-\frac{1}{3}+3\right)$$

$$= 30\tfrac{2}{3} = \underline{\underline{30{,}\overline{6}}}$$

Absoluter Fehler: $10{,}\overline{6}$ Trapezformel
$0{,}\overline{6}$ Summierte Trapezformel

Relativer Fehler: $\frac{10{,}\overline{6}}{30{,}\overline{6}} = 0{,}347\ldots$ Trap. formel
$\hat{=}\ 34{,}7\,\%$

$\frac{0{,}\overline{6}}{30{,}\overline{6}} = 0{,}0217\ldots$ sum. Trap. formel
$\hat{=}\ 2{,}17\,\%$

4.) Äquidistante Zerlegung von $[0,\pi]$ für $n=4$ liefert

$x_k = 0 + k \cdot \frac{\pi}{4}$ für $k = 0,1,2,3,4$ bzw.

$x_0 = 0,\ x_1 = \frac{\pi}{4},\ x_2 = \frac{\pi}{2},\ x_3 = \frac{3}{4}\pi,\ x_4 = 4.$

Summierte Trapezformel:

$$\int_0^{\pi} \sin(x)\,dx$$

$$\approx \frac{\pi}{4}\left(\underbrace{\frac{\sin(0)}{2}}_{0} + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{1} + \sin\left(\frac{3}{4}\pi\right) + \underbrace{\frac{\sin(\pi)}{2}}_{0}\right)$$

$$= \frac{\pi}{4}\left(0 + 0{,}7071\ldots + 1 + 0{,}7071\ldots + 0\right)$$

$$= \underline{\underline{1{,}8961\ldots}}$$

5.) Äquidistante Zerlegung von $[0,\pi]$ für $n=2$ liefert

$x_k = 0 + k \cdot \frac{\pi}{4}$ für $k = 0,1,2,3,4$ bzw.

$x_0 = 0,\ x_1 = \frac{\pi}{4},\ x_2 = \frac{\pi}{2},\ x_3 = \frac{3}{4}\pi,\ x_4 = 4.$

Summierte Simpson-Formel:

$$\int_0^{\pi} \sin(x)\,dx \approx$$

$$\frac{\pi}{12}\left(\underbrace{\sin(0)}_{0} + 4\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + 2\,\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{1} + 4\sin\left(\frac{3}{4}\pi\right) + \underbrace{\sin(\pi)}_{0}\right)$$

$$= \frac{\pi}{12}\left(0 + 4 \cdot 0{,}7071\ldots + 2 \cdot 1 + 4 \cdot 0{,}7071\ldots + 0\right)$$

$$= \underline{\underline{2{,}0045\ldots}}$$