KLAUSUR – Vorbereitung: Newton-Verfahren

1.) Berechnen Sie $\sqrt{5} = 2{,}23606797\ldots$ näherungsweise, indem Sie das Newton-Verfahren auf das Nullstellenproblem

$$f(x) = x^2 - 5 = 0$$

anwenden.

a) Führen Sie zwei Iterationen mit dem Startwert $x_0 = 2$ durch.

b) Wieviele weitere Iterationsschritte sind etwa erforderlich, um 12 exakte Nachkommastellen zu berechnen?

2.) a) Wenden Sie das Newton-Verfahren auf die Funktion $f(x) = x^5 - 37$ an. Führen Sie zwei Iterationen mit dem Startwert $x_0 = 2$ durch (sieben Nachkommastellen).

b) Gegen welche Nullstelle konvergiert die Iteration und wieviele Nachkommastellen sind in der zweiten Iteration exakt?
Wieviele weitere Iterationsschritte sind etwa erforderlich, um 16 exakte Nachkommastellen zu berechnen?

Lösung

1.)

a) $f(x) = x^2 - 5$

$f'(x) = 2x$

Newton-Verfahren:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$= x_n - \frac{x_n^2 - 5}{2x_n}$$

$$= x_n - \frac{1}{2}x_n + \frac{5}{2}\frac{1}{x_n}$$

$$= \frac{1}{2}x_n + \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{x_n}$$

Startwert $x_0 = 2$

Iteration $x_1 = 1 + \frac{5}{4} = \frac{9}{4} = 2{,}25$

$x_2 = \frac{9}{8} + \frac{20}{18} = 2{,}236\overline{1}$

3 exakte Nachkommastellen

b) Pro Iterationschritt etwa Verdopplung der Stellen.

3. Schritt: etwa 6 exakte Nachkommastellen

4. " " 12 " "

Also etwa zwei weitere Iterationsschritte erfordrlich.

2.) a) $f(x) = x^5 - 37$

$f'(x) = 5x^4$

Newton – Verfahren :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^5 - 37}{5x_n^4}$$

$$x_{n+1} = \frac{4x_n}{5} + \frac{37}{5x_n^4}$$

Startwert: $x_0 = 2$

Iteration: $x_1 = \frac{33}{16} = 2{,}0625$

$x_2 = 2{,}0589365\ldots$

d) $x^5 - 37 = 0 \iff x = \sqrt[5]{37}$

Konvergenz $x_n \to \sqrt[5]{37} = 2{,}0589241$

x_2 hat 4 exakte Nachkommastellen

Pro Iterationschritt etwa Verdopplung der Stellen.

3. Schritt: etwa 8 exakte Nachkommastellen

4. " " 16 " "

Also etwa zwei weitere Iterationsschritte erforderlich.