KLAUSUR – Vorbereitung: Fourier – Reihen

1.) Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2π–periodische Fortsetzung von

$$f(x) = \begin{cases} \pi + x, & -\pi \leq x \leq 0 \\ \pi - x, & 0 < x \leq \pi \end{cases}.$$

a) Stellen Sie den Verlauf von f grafisch dar.

b) Berechnen Sie alle Koeffizienten der Fourier-Reihe

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)).$$

Zeigen Sie, dass $b_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt und

$$a_k = \begin{cases} \frac{4}{k^2\pi}, & k \text{ ungerade} \\ 0, & k \text{ gerade} \end{cases} \quad \text{für } k \in \mathbb{N}.$$

c) Schreiben Sie die Fourier-Reihe auf und geben Sie die 1. und 3. Näherung an.

2.) Berechnen Sie die Fourier-Entwicklung der 2π-periodischen Fortsetzungen folgender Funktionen.

a) $f: [-\pi, \pi) \to \mathbb{R}, \; f(x) = |x|$

b) $f: [-\pi, \pi) \to \mathbb{R}, \; f(x) = x$

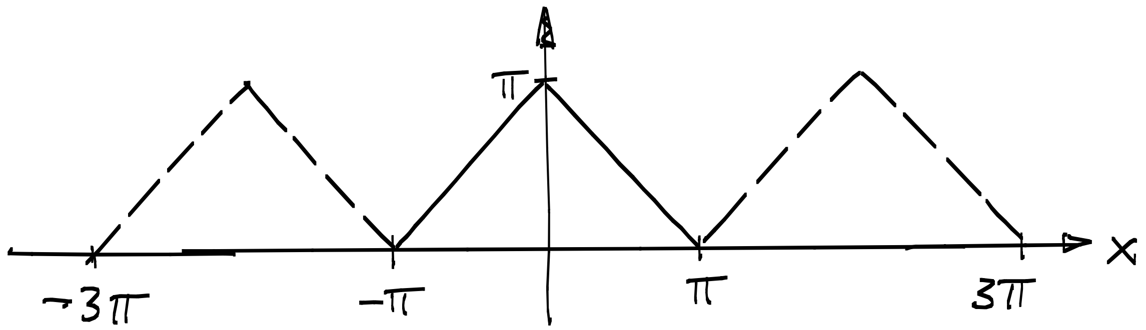
c) $f: [0, 2\pi) \to \mathbb{R}, \; f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \pi \\ 0, & x = 0, \; x = \pi \\ -1, & \pi < x < 2\pi \end{cases}$

Stellen Sie zunächst die Funktionen grafisch dar.

Lösungen

1.)

a) Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \pi + x, & -\pi \le x \le 0 \\ \pi - x, & 0 < x \le \pi \end{cases}$



b) f ist eine gerade Funktion. Daher gilt:

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x) \overbrace{\sin(kx)}^{\text{ungerade}}}_{\text{ungerade}} \, dx = 0 \quad \text{für } k \in \mathbb{N}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \overbrace{f(x)}^{\pi - x} dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[\pi x - \frac{1}{2} x^2 \right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi} \left(\underbrace{\pi^2 - \frac{1}{2}\pi^2}_{= \frac{1}{2}\pi^2} \right)$$

$$= \underline{\underline{\pi}}$$

Berechnung von a_k für $k = 1, 2, 3, \dots$:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x)\cos(kx)}_{\text{gerade}}\, dx$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\cos(kx)\, dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \underbrace{(\pi - x)}_{u} \underbrace{\cos(kx)}_{v'}\, dx \quad \text{partielle Integration}$$

$$\overset{k \neq 0}{=} \frac{2}{\pi}\Big[(\pi - x) \cdot \frac{1}{k}\sin(kx)\Big]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (-1)\,\frac{1}{k}\sin(kx)\, dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\,(0 - 0) + \frac{2}{k\pi}\int_0^{\pi} \sin(kx)\, dx$$

$$= \frac{2}{k\pi}\Big[-\frac{1}{k}\cos(kx)\Big]_0^{\pi}$$

$$= -\frac{2}{k^2\pi}\Big[\cos(kx)\Big]_0^{\pi}$$

$$= -\frac{2}{k^2\pi}\big(\underbrace{\cos(k\pi)}_{(-1)^k} - \underbrace{\cos(0)}_{1}\big)$$

$$= -\frac{2}{k^2\pi}\left((-1)^k - 1\right)$$

$$= \underline{\underline{\begin{cases} \frac{4}{k^2\pi}, & k \text{ ungerade} \\ 0, & k \text{ gerade} \end{cases}}}$$

c) $$f(x) = \underbrace{\frac{a_0}{2}}_{=\frac{\pi}{2}} + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\underbrace{a_k}_{=\begin{cases} \frac{4}{k^2\pi}, & k=1,3,5,\ldots \\ 0, & k=2,4,6,\ldots \end{cases}} \cos(kx) + \underbrace{b_k}_{=0} \sin(kx) \Big)$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \left(\cos(x) + \frac{1}{3^2} \cos(3x) + \frac{1}{5^2} \cos(5x) + \ldots \right)$$

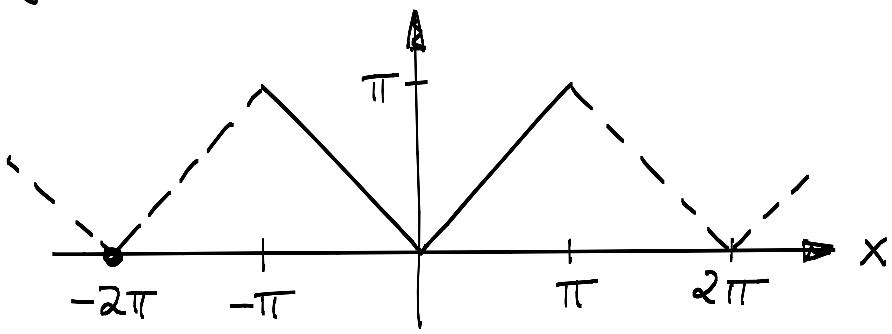
1\. Näherung: $f_1(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \cos(x)$

3\. Näherung: $f_3(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \cos x + \frac{4}{9\pi} \cos(3x)$

2.)

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-periodisch

$f(x) = |x|$ für $x \in [-\pi, \pi]$



f ist eine gerade Funktion.

Es soll f in eine Fourier-Reihe entwickelt werden:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \right)$$

Da f gerade ist, gilt

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{|x| \cdot \sin(kx)}_{\text{ungerade}} \, dx = \underline{\underline{0}} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}$$

Berechnung der Koeffizienten a_k:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \, dx = 2 \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \, dx = \cancel{2} \cdot \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{\cancel{2}} x^2 \right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\pi^2 - 0 \right) = \pi$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{|x| \cdot \cos(kx)}_{\text{gerade}} \, dx \quad \text{mit } k \in \mathbb{N}$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \underbrace{x}_{u} \, \underbrace{\cos(kx)}_{v'} \, dx \quad \text{partielle Integration}$$

$$\overset{k \neq 0}{=} \frac{2}{\pi} \left[x \cdot \frac{1}{k} \sin(kx) \right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{k} \sin(kx) \, dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \frac{1}{k} \Big(\underbrace{\sin(k\pi)}_{=0} - \underbrace{\sin(0)}_{=0} \Big) + \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{k^2} \left[\cos(kx) \right]_0^{\pi}$$

$$= 0 + \frac{2}{\pi} \frac{1}{k^2} \Big(\underbrace{\cos(k \cdot \pi)}_{(-1)^k} - 1 \Big)$$

$$= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{k^2} \cdot \begin{cases} 0, & k = 0, 2, 4, \ldots \\ -2, & k = 1, 3, 5, \ldots \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & k = 0, 2, 4, \ldots \\ -\frac{4}{\pi k^2}, & k = 1, 3, 5, \ldots \end{cases}$$

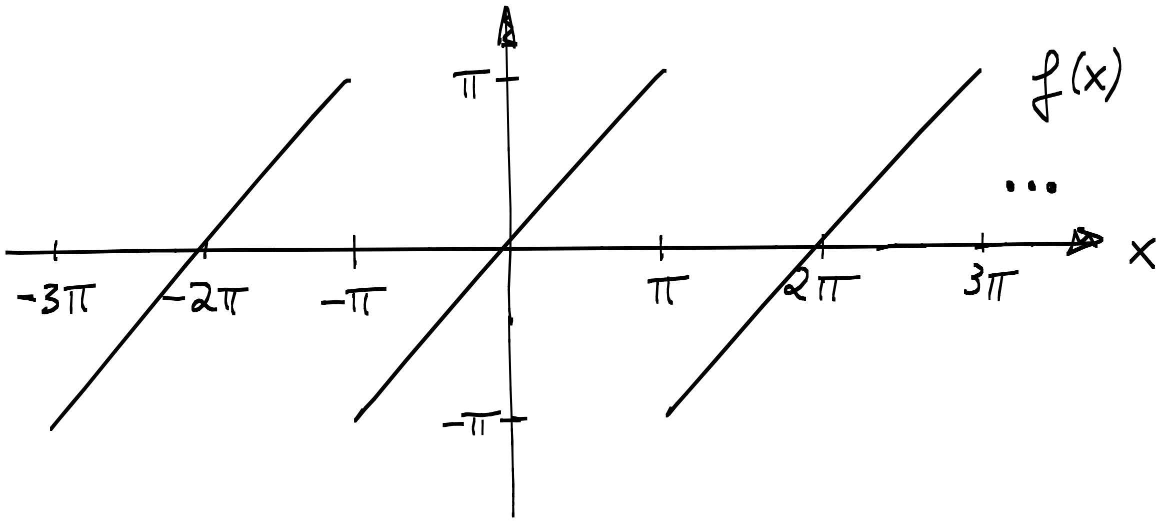
Ergebnis:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \big(a_k \cos(kx) + \underbrace{b_k}_{=0} \sin(kx) \big)$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos(x) + \frac{1}{3^2} \cos(3x) + \frac{1}{5^2} \cos(5x) + \ldots \right)$$

Fourier-Reihe von f

b) $f: [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$



f ist eine ungerade Funktion.

Fourier-Reihe

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \right)$$

Es gilt

$a_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, da f ungerade ist

Berechnung der Fourier-Koeffizienten b_k:

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cdot \sin(kx)\, dx \quad \text{mit } k \in \mathbb{N}$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{\sin(kx)}_{v'} dx$$ partielle Integration

$$= \frac{2}{\pi}\left[x \cdot \frac{-1}{k}\cos(kx)\right]_0^{\pi} + \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{k}\int_0^{\pi}\cos(kx)\,dx$$

$$= -\frac{2}{k\cancel{\pi}}\Big(\cancel{\pi}\underbrace{\cos(k\pi)}_{(-1)^k} - 0\Big) + \frac{2}{k\pi}\cdot\frac{1}{k}\underbrace{\Big[\sin(kx)\Big]_0^{\pi}}_{\substack{=0 \\ \text{da } \sin(k\pi)=0}}$$

$$= 2\cdot\frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

Ergebnis:

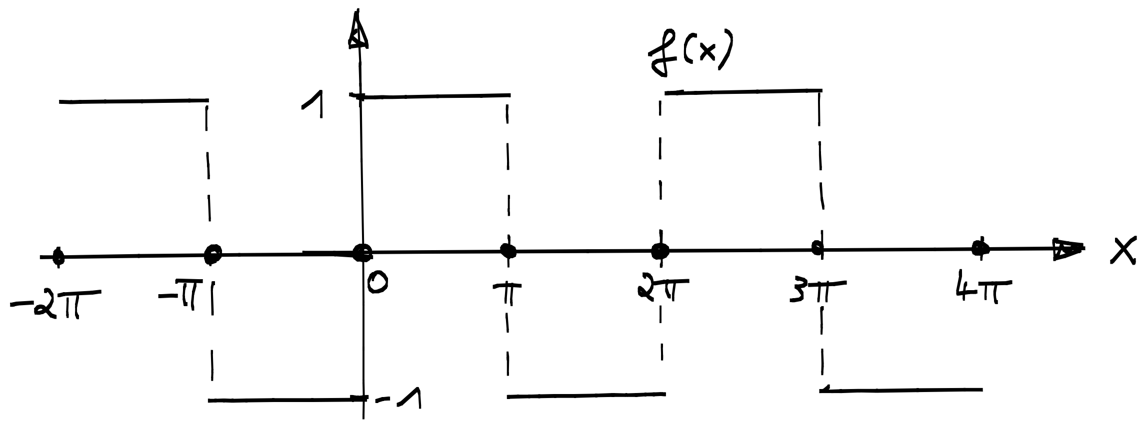
$$f(x) = \underbrace{\frac{a_0}{2}}_{=0} + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(\underbrace{a_k}_{=0}\cos(kx) + b_k\sin(kx)\Big)$$

$$= 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin(kx)$$

$$= 2\left(\sin(x) - \frac{1}{2}\sin(2x) + \frac{1}{3}\sin(3x) \mp \ldots\right)$$

Fourier-Reihe von f

c) Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}1 & \text{für } 0<x<\pi\\ 0 & \text{für } x=0,\ x=\pi \\ -1 & \text{für } \pi<x<2\pi\end{cases}$



f ist eine ungerade Funktion. Daher gilt:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x)\overbrace{\cos(kx)}^{\text{gerade}}}_{\text{ungerade}}\,dx = 0 \text{ für } k\in\mathbb{N}_0 .$$

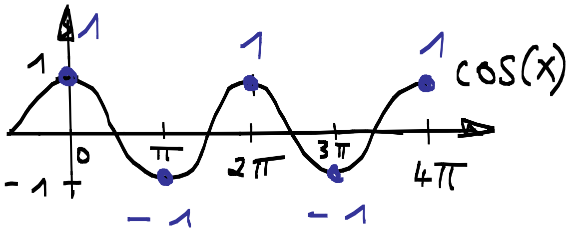
Sei $k = 1, 2, \dots$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cdot\sin(kx)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 1\cdot\sin(kx)\,dx - \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}\sin(kx)\,dx$$

$$\overset{k\neq 0}{=} \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{k}\cos(kx)\right]_0^{\pi} - \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{k}\cos(kx)\right]_{\pi}^{2\pi}$$

$$= \frac{-1}{k\pi}\Big(\underbrace{\cos(k\pi)}_{(-1)^k} - \underbrace{\cos 0}_{1}\Big) + \frac{1}{k\pi}\Big(\underbrace{\cos(2k\pi)}_{(-1)^{2k}} - \underbrace{\cos(k\pi)}_{(-1)^k}\Big)$$



$$= \frac{-1}{k\pi}\left((-1)^k - 1\right) + \frac{1}{k\pi}\left(1 - (-1)^k\right)$$

$$= \frac{1}{k\pi}\left(1 - (-1)^k + 1 - (-1)^k\right)$$

$$= \frac{1}{k\pi}\left(2 - 2\cdot(-1)^k\right)$$

$$= \frac{1}{k\pi} \cdot \begin{cases} 0, & k \text{ gerade} \\ 4, & k \text{ ungerade} \end{cases}$$

Also gilt:

$$b_k = \begin{cases} 0, & k \text{ gerade} \\ \frac{4}{k\pi}, & k \text{ ungerade} \end{cases}, \quad k \in \mathbb{N}$$

Ergebnis

$$f(x) = \underbrace{\frac{a_0}{2}}_{=0} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\underbrace{a_k}_{=0} \cos(kx) + \underbrace{b_k}_{= \begin{cases} 0, & k \text{ gerade} \\ \frac{4}{k\pi}, & k \text{ ungerade} \end{cases}} \sin(kx) \right)$$

$$= \frac{4}{\pi}\left(\sin(x) + \frac{1}{3}\sin(3x) + \frac{1}{5}\sin(5x) + \ldots\right)$$

Fourier-Reihe von f