KLAUSUR-Vorbereitung: Bogenlänge

1.) Es sei $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Geben Sie die Formel für die Bogenlänge von f an.

2.) Berechnen Sie die Bogenlänge der folgenden Funktionen:

a) $f:[-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1-x^2}$,

b) $f:[-2,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2\cosh\left(\frac{x}{2}\right)$,

Tipp: $(\cosh(x))^2 - (\sinh(x))^2 = 1$,

c) $f:[0,4] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{x} + 1$,

d) $f:[0,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{2x^3}$.

die Aufgaben können auch als Text formuliert sein, z.B.

3.) Eine Kette wird an zwei 4 m auseinander liegenden Punkten gleicher Höhe aufgehängt und besitzt dann den Funktionsverlauf von $f(x) = 2\cosh\left(\frac{x}{2}\right)$ für $-2 \le x \le 2$. Wie lang ist die Kette?

4.) Es seien $f, g:[a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen. Die Abbildung $\varphi:[a,b] \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(t) = \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix}$ beschreibt eine Kurve in der Ebene. Geben Sie die Formel für die Bogenlänge der Kurve an.

5.) Berechnen Sie die Bogenlänge der folgenden Kurven:

a) $\varphi:[0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(t) = \begin{pmatrix} r\cdot\cos(t) \\ r\cdot\sin(t) \end{pmatrix}$,

b) $\varphi : [-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}] \to \mathbb{R}^2, \ \varphi(t) = \begin{pmatrix} 3t^2 - 1 \\ 3t^3 - t \end{pmatrix},$

c) $\varphi : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \ \varphi(t) = \begin{pmatrix} t - \sin(t) \\ 1 - \cos(t) \end{pmatrix},$

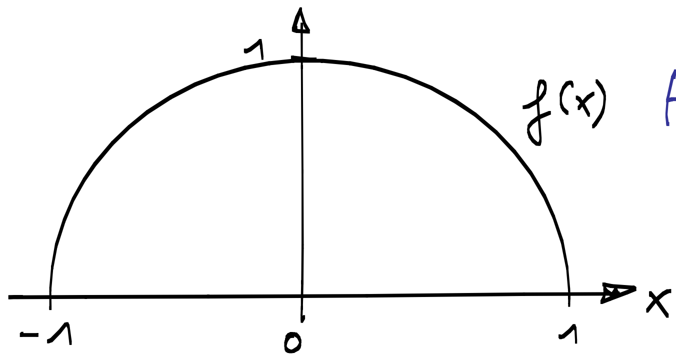
Hinweis: $1 - \cos(t) = 2\left(\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right)^2.$

Lösung

1.) $L = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.$

2.)

a) $f: [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1-x^2}$



Halbkreis $(r=1)$

$$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$L = \int_{-1}^{1} \sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}\,dx$$

$$1+\frac{x^2}{1-x^2} = \frac{1-x^2+x^2}{1-x^2} = \frac{1}{1-x^2}$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

wegen der Symmetrie von $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$= 2\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$= 2\,\left[\arcsin x\right]_0^1$$

$$= 2\,(\underbrace{\arcsin 1}_{=\frac{\pi}{2}} - \underbrace{\arcsin 0}_{=0})$$

$$= \underline{\underline{\pi}}$$ wegen $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ und $\sin 0 = 0$

b) $f : [-2,2] \to \mathbb{R},\; f(x) = 2 \cdot \cosh\left(\frac{x}{2}\right)$

$$f'(x) = 2 \cdot \sinh\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} = \sinh\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$L = \int_{-2}^{2} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

$$= \int_{-2}^{2} \sqrt{\underbrace{1 + \sinh^2\left(\frac{x}{2}\right)}_{\cosh^2\left(\frac{x}{2}\right)}}\, dx$$ (siehe Tipp)

$$= \int_{-2}^{2} \cosh\left(\frac{x}{2}\right) dx$$

wegen der Symmetrie von $\cosh\left(\frac{x}{2}\right)$

$$= 2 \cdot \int_{0}^{2} \cosh\left(\frac{x}{2}\right) dx$$

$$= 2 \cdot \left[2 \cdot \sinh\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^2$$

$$= 4\,(\sinh(1) - \underbrace{\sinh(0)}_{=0})$$

$$= \cancel{4}^{\,2}\, \frac{e^{1} - e^{-1}}{\cancel{2}}$$ $\sinh(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$

$$= \underline{\underline{2\left(e - \frac{1}{e}\right)}} = 4{,}70\ldots$$

c) $f: [0,4] \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{2} x \sqrt{x} + 1,$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{2} x^{\frac{3}{2}} + 1\right)' = \frac{3}{4} x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{4}\sqrt{x}$$

Bogenlänge:

$$L = \int_0^4 \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

$$= \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{16} x}\, dx$$

$$= \frac{16}{9} \frac{1}{\frac{3}{2}} \left[\left(1 + \frac{9}{16} x\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^4$$

$$= \frac{16}{9} \cdot \frac{2}{3} \left(\left(1 + \frac{9}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right) = \underline{\underline{5{,}7588\ldots}}$$

d) $f: [0,2] \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{2x^3} = \sqrt{2}\, x^{\frac{3}{2}}$

$$f'(x) = \cancel{\sqrt{2}} \cdot \frac{3}{\cancel{2}_{\sqrt{2}}} \cdot x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \sqrt{x}$$

$$L = \int_0^2 \sqrt{1 + \frac{9}{2} x}\, dx$$

Berechnung der Stammfunktion von $\sqrt{1 + \frac{9}{2} x}$:

$$\int \sqrt{1 + \frac{9}{2} x} = \frac{2}{9} \int \underbrace{\frac{9}{2}}_{t'} \cdot \underbrace{\sqrt{1 + \frac{9}{2} x}}_{t}\, dx$$

Substitution $t = 1 + \frac{9}{2} x$

$$= \frac{2}{9} \int \underbrace{\sqrt{t}}_{t^{\frac{1}{2}}} \, dt$$

$$= \frac{2}{9} \frac{1}{\frac{3}{2}} t^{\frac{3}{2}} + C$$

Rücksubst. $\longrightarrow = \frac{4}{27} \left(1 + \frac{9}{2} x\right)^{\frac{3}{2}} + C$

$$L = \int_0^2 \sqrt{1 + \frac{9}{2} x} \, dx$$

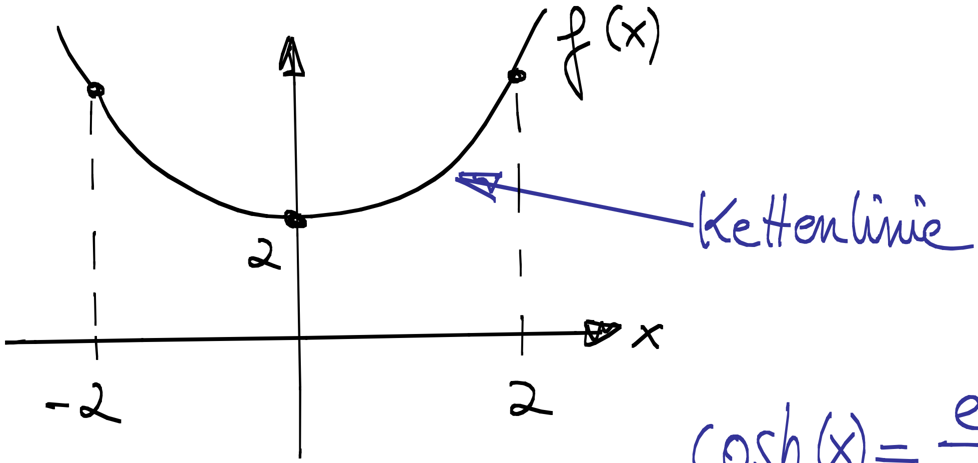
$$= \left[\frac{4}{27} \left(1 + \frac{9}{2} x\right)^{\frac{3}{2}} \right]_0^2$$

$$= \frac{4}{27} \left(\left(1 + \frac{9}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}\right)^{\frac{3}{2}} - 1 \right)$$

$$= \frac{4}{27} \left(\sqrt{1000} - 1 \right)$$

$$= \underline{\underline{4{,}5367 \ldots}}$$

3.) $f: [-2,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2\cosh\left(\frac{x}{2}\right)$



$$\cosh(x) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

Berechnung der Bogenlänge siehe oben:

$$L = \int_{-2}^{2} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

$$= 2\left(e - \frac{1}{e}\right) = 4{,}70\ldots$$

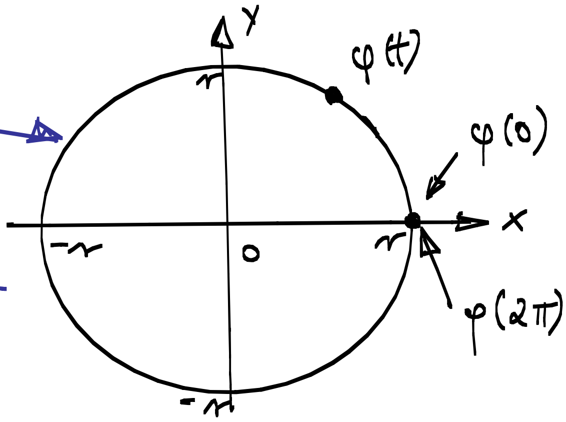
Die Kette ist etwa 4,7 m lang.

4.) $L = \int_a^b \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2}\, dt.$

5.)

a) $\varphi: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \varphi(t) = \begin{pmatrix} r \cdot \cos(t) \\ r \cdot \sin(t) \end{pmatrix}$

Kreis mit Radius r



Bogenlänge des Kreises:

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 \underbrace{(\sin^2(t) + \cos^2(t))}_{=1}}\, dt$$

$$= r \cdot \int_0^{2\pi} 1\, dt$$

$$= \underline{\underline{2\pi r}}$$ Umfang des Kreises

b) $\varphi: [-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}] \to \mathbb{R}^2, \; \varphi(t) = \begin{pmatrix} 3t^2-1 \\ 3t^3-t \end{pmatrix}$

$$L = \int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \sqrt{(6t)^2 + (9t^2-1)^2}\, dt$$

$$= \int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \sqrt{\underbrace{36t^2 + 81t^4 - 18t^2 + 1}}\, dt$$

$$81t^4 + 18t^2 + 1 = (9t^2+1)^2$$

$$= \int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} (9t^2+1)\, dt$$

$$= \Big[3t^3 + t\Big]_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$= 3\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \left(-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= 2 \cdot \left(3\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= 2\left(\underbrace{3\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}_{2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$= \underline{\underline{\frac{4}{\sqrt{3}}}} = 2{,}3094\ldots$$

c) $\varphi : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \varphi(t) = \begin{pmatrix} t - \sin(t) \\ 1 - \cos(t) \end{pmatrix}$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1-\cos(t))^2 + \sin^2(t)}\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\cos(t) + \underbrace{\cos^2(t) + \sin^2(t)}_{=1}}\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2\,(\underbrace{1-\cos(t)}_{2\sin^2(\frac{t}{2})})}\, dt$$

$$= 2 \int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt$$

$$= 2 \left[2 \left(-\cos\left(\frac{t}{2}\right) \right) \right]_0^{2\pi}$$

$$= 4 \left(\underbrace{-\cos(\pi)}_{-1} - \left(\underbrace{-\cos(0)}_{-1} \right) \right)$$

$$= \underline{\underline{8}}$$