

Übungen zur Mathematik 1
 Lösungen Blatt 11

Aufgabe 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4+1 \\ 2+6+1 \\ 4+4+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+0+1 \\ -2+0+1 \\ 4+0-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2

a) $A \cdot A = \begin{pmatrix} 13 & 34 & 18 \\ 8 & 32 & 17 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -13 & 19 & 15 \\ -21 & 10 & 12 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$A \cdot B \neq B \cdot A$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 8 & 32 & 17 \\ -5 & -3 & -1 \\ -12 & -13 & -8 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot B = \begin{pmatrix} -21 & 10 & 12 \\ -4 & -9 & -6 \\ -16 & -20 & -3 \end{pmatrix}$$

b) $A \cdot A$ und $B \cdot B$ existieren nicht.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 13 & 18 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 10 & 12 & 29 \\ 1 & 4 & 3 & 8 \\ 0 & -4 & 0 & -2 \\ 1 & 8 & 3 & 10 \end{pmatrix}$$

$A \cdot B$ und $B \cdot A$ sind von verschiedenem Typ und können somit nicht gleich sein

Aufgabe 3

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -3 & 1 \cdot 2 & 1 \cdot 3 \\ 2 & 3 & 2 & \leftarrow \\ 3 & 5 & 5 & \leftarrow \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \cdot (-2) \\ 0 & 2 & -4 & \leftarrow \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} 3 \text{ Nicht-Null-Zeilen}$$

\Rightarrow Matrix A ist regulär, $\text{rang}(A) = 3$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 3 & 1 \cdot (-1) & 1 \cdot (-1) \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & \leftarrow \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \leftarrow \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \cdot (-1) & 1 \cdot (-2) \\ 0 & 1 & 1 & -2 & \leftarrow \\ 0 & 2 & 2 & -2 & \leftarrow \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} 2 \text{ Nicht-Null-Zeilen}$$

\Rightarrow Matrix B ist singulär
 $\text{rang}(B) = 2$ (Anzahl der Nicht-Null-Zeilen)

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \cdot (-4) & 1 \cdot 1 & 1 \cdot (-3) \\ 4 & -1 & -1 & 6 & \leftarrow \\ -1 & 2 & 2 & 2 & \leftarrow \\ 3 & -1 & 0 & 3 & \leftarrow \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -9 & 6 & 1 \cdot 2 & 1 \cdot (-1) \\ 0 & 2 & 4 & 2 & \leftarrow \\ 0 & -1 & -6 & 3 & \leftarrow \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -9 & 6 \\ 0 & 0 & -14 & 14 & |:14 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & \\ 0 & -1 & -3 & 6 & \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \cdot 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & \leftarrow \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}} \right] 3 \text{ Nicht-Null-Zeilen}$$

\Rightarrow Matrix C ist singular
 $\text{rang}(C) = 3$

Aufgabe 4

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdot (-2) \\ 2 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & \leftarrow \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -2 & 1 & 0 & \cdot (-3) \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & \leftarrow \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 13 & 6 & -3 & 1 & \cdot 13 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \leftarrow \\ 0 & 1 & -4 & -2 & 1 & 0 & \leftarrow \\ 0 & 0 & 1 & \frac{6}{13} & -\frac{3}{13} & \frac{1}{13} & \cdot 4 \quad \cdot (-1) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{13} & \frac{3}{13} & -\frac{1}{13} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{13} & \frac{1}{13} & \frac{4}{13} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{6}{13} & -\frac{3}{13} & \frac{1}{13} \end{array}$$

A^{-1}

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{13} & \frac{3}{13} & -\frac{1}{13} \\ -\frac{2}{13} & \frac{1}{13} & \frac{4}{13} \\ \frac{6}{13} & -\frac{3}{13} & \frac{1}{13} \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \\ 6 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Probe:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \\ 6 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \\ 6 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 13 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & 13 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{3 \times 3 \text{-Einheitsmatrix}} \checkmark$$