

Übungen zur Mathematik 1
 Lösungen Blatt 10

Aufgabe 1

a) $x + 2,5x + 2 = 77$
 ↑ ↑ ↑
 Alter des Sohnes Alter des Vaters Alter des Opas

$$\Leftrightarrow 3,5x = 77$$

$$\Leftrightarrow \frac{7}{2}x = 77 \quad | \cdot \frac{2}{7}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2}{7} \cdot 77$$

$$\Leftrightarrow \underline{x = 22}$$

Der Sohn ist 22 Jahre und der Vater ist $2,5 \cdot 22 = 55$ Jahre alt.

b) $5x + 3 = 2(3x - 1)$

$$\Leftrightarrow 5x + 3 = 6x - 2 \quad | -5x$$

$$\Leftrightarrow 3 = x - 2 \quad | + 2$$

$$\Leftrightarrow 5 = x$$

$$\Leftrightarrow \underline{x = 5}$$

Die Zahl lautet 5.

c) $7x - 6 = 8x - 9 - 4x + 5$

$$\Leftrightarrow 7x - 6 = 4x - 4 \quad | + 6$$

$$\Leftrightarrow 7x = 4x + 2 \quad | - 4x$$

$$\Leftrightarrow 3x = 2 \quad | : 3$$

$$\Leftrightarrow \underline{x = \frac{2}{3}}$$

d) $100 + 2x - 9x + 15 = 10 - 7x + 5 - 11x$

$$\Leftrightarrow 115 - 7x = 15 - 18x \quad | + 18x$$

$$\Leftrightarrow 115 + 11x = 15 \quad | - 115$$

$$\Leftrightarrow 11x = -100 \quad | : 11$$

$$\Leftrightarrow \underline{x = -\frac{100}{11}}$$

e) $3(x-6) + 8x(x-2) = 8x(x+1)$

$$\Leftrightarrow 3x - 18 + 8x^2 - 16x = 8x^2 + 8x$$

$$\Leftrightarrow -13x - 18 + 8x^2 = 8x^2 + 8x \quad | - 8x^2$$

$$\Leftrightarrow -13x - 18 = 8x \quad | + 13x$$

$$\Leftrightarrow -18 = 21x$$

$$\Leftrightarrow 21x = -18 \quad | : 21$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{18}{21}$$

$$\Leftrightarrow \underline{x = -\frac{6}{7}}$$

c) $x^2 + 13x = 888$

$$\Leftrightarrow x^2 + 13x + \left(\frac{13}{2}\right)^2 = 888 + \left(\frac{13}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{13}{2}\right)^2 = 888 + \frac{169}{4}$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{13}{2} = \pm \sqrt{\frac{4 \cdot 888 + 169}{4}}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{13}{2} \pm \sqrt{\frac{3721}{4}}$$

$$= -\frac{13}{2} \pm \frac{61}{2}$$

$$\Leftrightarrow \underline{x = 24} \vee \underline{x = -37}$$

gesuchte positive Zahl

Die Zahl lautet 24.

Aufgabe 2

a) $5x - 2 = 2x + 10 \quad | + 2$

$$\Leftrightarrow 5x = 2x + 12 \quad | - 2x$$

$$\Leftrightarrow 3x = 12 \quad | : 3$$

$$\Leftrightarrow \underline{x = 4}$$

b) $24 - 7x = 3 \quad | + 7x$

$$\Leftrightarrow 24 = 7x + 3 \quad | - 3$$

$$\Leftrightarrow 21 = 7x$$

$$\Leftrightarrow 7x = 21 \quad | : 7$$

$$\Leftrightarrow \underline{x = 3}$$

f) $ax + b^2 = a^2 - bx \quad | + bx$

$$\Leftrightarrow ax + bx + b^2 = a^2$$

$$\Leftrightarrow (a+b)x + b^2 = a^2 \quad | - b^2$$

$$\Leftrightarrow (a+b)x = a^2 - b^2 \quad | : (a+b) \text{ erlaubt, da nach Voraussetzung } a+b \neq 0 \text{ ist!}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{a^2 - b^2}{a+b} = (a+b)(a-b) \quad \text{3. binomische Formel}$$

$$= \frac{(a+b)(a-b)}{a+b}$$

$$\Leftrightarrow \underline{x = a-b}$$

Aufgabe 3

a) Lösung mit quadratischer Ergänzung:

$$x^2 + 2x = 63$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 63 + 1$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 = 64$$

$$\Leftrightarrow x+1 = \pm \sqrt{64}$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \pm 8$$

$$\Leftrightarrow \underline{x = 7} \vee \underline{x = -9}$$

Lösung mit p,q-Formel

$$x^2 + 2x - 63 = 0, p = 2, q = -63$$

$$x_{1,2} = -\frac{2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 - (-63)}$$

$$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{64} = -1 \pm 8$$

$$\underline{x_1 = 7, x_2 = -9}$$

b) $x^2 - 8x + 15 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 - 8x + 4^2 = -15 + 4^2$$

$$\Leftrightarrow (x-4)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow x-4 = \pm \sqrt{1}$$

$$\Leftrightarrow x = 4 \pm 1$$

$$\Leftrightarrow \underline{x = 5 \vee x = 3}$$

$$x^2 - 8x + 15 = 0, p = -8, q = 15$$

$$x_{1,2} = 4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 15}$$

$$= 4 \pm 1$$

$$\underline{x_1 = 5, x_2 = 3}$$

c) $x^2 + 6x = 91$

$$\Leftrightarrow x^2 + 6x + 3^2 = 91 + 3^2$$

$$\Leftrightarrow (x+3)^2 = 100$$

$$\Leftrightarrow x+3 = \pm \sqrt{100}$$

$$\Leftrightarrow x = -3 \pm 10$$

$$\Leftrightarrow \underline{x = 7 \vee x = -13}$$

$$x^2 + 6x - 91 = 0, p = 6, q = 91$$

$$x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{3^2 + 91}$$

$$= -3 \pm 10$$

$$\underline{x_1 = 7, x_2 = -13}$$

d) $x^2 - 40x + 111 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 - 40x + 20^2 = 20^2 - 111$$

$$\Leftrightarrow (x-20)^2 = 289$$

$$\Leftrightarrow x-20 = \pm \sqrt{289}$$

$$\Leftrightarrow x = 20 \pm 17$$

$$\Leftrightarrow \underline{x = 37 \vee x = 3}$$

$$x^2 - 40x + 111 = 0, p = -40, q = 111$$

$$x_{1,2} = 20 \pm \sqrt{(-20)^2 - 111}$$

$$= 20 \pm 17$$

$$\underline{x_1 = 37, x_2 = 3}$$

Aufgabe 4

$$x^2 - 10x + 32 = 0, p = -10, q = 32$$

$$x_{1,2} = 5 \pm \sqrt{5^2 - 32}$$

$$= 5 \pm \sqrt{-7} = 5 \pm \sqrt{7} \cdot i$$

$$\underline{x_1 = 5 + \sqrt{7}i, x_2 = 5 - \sqrt{7}i}$$

Aufgabe 5

a) $\frac{8-x}{2} - \frac{2x-11}{x-3} = \frac{x-2}{6}$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$$

$$\frac{8-x}{2} - \frac{2x-11}{x-3} = \frac{x-2}{6} \quad | \cdot 6(x-3)$$

$$\Leftrightarrow 3(8-x)(x-3) - 6(2x-11) = (x-2)(x-3)$$

$$\Leftrightarrow 24x - 72 - 3x^2 + 9x - 12x + 66 = x^2 - 2x - 6$$

$$= x^2 - 3x - 2x + 6$$

$$\Leftrightarrow -3x^2 + 21x - 6 = x^2 - 5x + 6$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 26x + 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - \frac{13}{2}x + 3 = 0, p = -\frac{13}{2}, q = 3$$

$$\Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{13}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{13}{4}\right)^2 - 3}$$

$$= \frac{13}{4} \pm \sqrt{\frac{169}{16} - \frac{48}{16}}$$

$$= \frac{13}{4} \pm \sqrt{\frac{121}{16}}$$

$$= \frac{13}{4} \pm \frac{11}{4}$$

$$L = \left\{6, \frac{1}{2}\right\}$$

b) $\frac{x^2+2x}{2x^2+2x-4}$ hat nur Sinn, wenn $2x^2+2x-4 \neq 0$ gilt.

$$2x^2+2x-4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2+x-2 = 0, p = 1, q = -2$$

$$x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2}$$

$$= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}}$$

$$= -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$$

$$x_1 = 1, x_2 = -2$$

Also: $D = \mathbb{R} \setminus \{1, -2\}$

$$\frac{x^2+2x}{2x^2+2x-4} = 1$$

$$\Leftrightarrow x^2+2x = 2x^2+2x-4 \quad | -x^2$$

$$\Leftrightarrow 2x = x^2+2x-4 \quad | -2x$$

$$\Leftrightarrow 0 = x^2 - 4$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2 \quad \text{einzige Lösung}$$

keine Lösung, da -2 nicht im Definitionsbereich

$$-2 \notin D$$

Ergebnis: $L = \{2\}$.