Übungen zur Mathematik 1
Lösungen Blatt 8

Aufgabe 1

$a_{n+1} = 2a_n + 3a_{n-1}$ und $a_1 = \underset{3^0}{1}$, $a_2 = \underset{3^1}{3}$

$$\begin{aligned}
a_3 &= 2a_2 + 3a_1 \\
&= 2\cdot 3 + 3\cdot 1 \\
&= 9 \qquad = 3^2 \\
a_4 &= 2\cdot 9 + 3\cdot 3 \\
&= 27 \qquad = 3^3 \\
a_5 &= 2\cdot 27 + 3\cdot 9 \\
&= 81 \qquad = 3^4 \\
a_6 &= 2\cdot 81 + 3\cdot 27 \\
&= 243 \qquad = 3^5
\end{aligned}$$

Es gilt: $a_n = 3^{n-1}$ für $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2

a) $x_n = \dfrac{1-n+n^2}{n+1}$ Zähler konvergiert stärker gegen ∞ als Nenner

Vermutung: x_n unbeschränkt.

$$\begin{aligned}
x_n = \frac{1-n+n^2}{n+1} &\geq \frac{1-n+n^2}{\underbrace{n+n}_{=2n}} \\
&\geq \frac{-n+n^2}{2n} \\
&= -\frac{1}{2} + \frac{n}{2} \longrightarrow \infty,
\end{aligned}$$

d.h. (x_n) unbeschränkt ($x_n \to \infty$).

Monotonie:

$$\begin{aligned}
x_{n+1} - x_n &= \frac{1-(n+1)+(n+1)^2}{n+2} - \frac{1-n+n^2}{n+1} \\
&= \frac{n^2+n+1}{n+2} - \frac{n^2-n+1}{n+1} \\
&= \frac{\cancel{n^3}+n^2+n^2+2n+1-\cancel{n^3}+n^2-n-2n^2+2n-2}{n^2+3n+2} \\
&= \frac{n^2+3n-1}{n^2+3n+2} \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

d.h. (x_n) monoton steigend ($x_{n+1} \geq x_n$).

b) $x_n = \dfrac{1-n+n^2}{n(n+1)}$

Vermutung: (x_n) beschränkt.

$$x_n = \frac{\overbrace{1-n}^{\leq n}+n^2}{\underbrace{n(n+1)}_{=n^2+n}} \leq \frac{n+n^2}{n^2+n} = 1$$

wegen $1-n \leq n \iff 1 \leq 2n$ (w) für $n = 1, 2, \ldots$

d.h. $x_n \leq 1$ für $n \in \mathbb{N}$.

Monotonie:

$$\begin{aligned}
x_{n+1} - x_n &= \frac{1-(n+1)+(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} - \frac{1-n+n^2}{n(n+1)} \\
&= \frac{1}{n+1}\left(\frac{n^2+n+1}{n+2} - \frac{n^2-n+1}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n+1}\cdot\frac{\cancel{n^3}+\cancel{n^2}+\cancel{n}-\cancel{n^3}+\cancel{n^2}-\cancel{n}-\cancel{2n^2}+\underset{2(n-1)}{2n-2}}{n(n+1)} \\
&= \frac{1}{n+1}\cdot\frac{2(n-1)}{n(n+1)} \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

d.h. (x_n) monoton steigend ($x_{n+1} \geq x_n$).

c) $x_n = \dfrac{1}{1+(-2)^n} = \dfrac{1}{1+(-1)^n\cdot 2^n}$

n gerade: $x_n = \dfrac{1}{1+2^n} \leq \dfrac{1}{1} = 1$ und $x_n \geq 0$ $\quad 0 \leq x_n \leq 1$

n ungerade: $x_n = \dfrac{1}{1-2^n} = \dfrac{-1}{2^n-1} \leq 0$ und $x_n \geq -1$ $\quad -1 \leq x_n \leq 0$

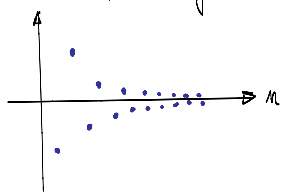
Also: $-1 \leq x_n \leq 1$ für $n \in \mathbb{N}$

bzw. $|x_n| \leq 1$, d.h. (x_n) ist beschränkt.

(x_n) ist weder monoton wachsend noch monoton fallend wegen:

$x_n \geq 0$, n gerade

und $x_n \leq 0$, n ungerade



d) $x_n = \sqrt{1+\frac{n+1}{n}} = \sqrt{2+\frac{1}{n}} \xrightarrow{(n\to\infty)} \sqrt{2+0} = \sqrt{2}$

$x_n \le \sqrt{2+1} = \sqrt{3}$, d.h. (x_n) ist beschränkt.

Monotonie:

$$x_{n+1} - x_n = \sqrt{2+\frac{1}{n+1}} - \sqrt{2+\frac{1}{n}}$$

wegen $\frac{1}{n+1} \le \frac{1}{n}$ $\rightarrow$ $\le \sqrt{2+\frac{1}{n}} - \sqrt{2+\frac{1}{n}} = 0$

d.h. (x_n) monoton fallend $(x_{n+1} \le x_n)$.

Aufgabe 3

$$a_n = \frac{n^2}{n^3-2} = \frac{\frac{n^2}{n^3}}{\frac{n^3}{n^3} - \frac{2}{n^3}}$$

Zähler und Nenner durch n^3 teilen

$$= \frac{\frac{1}{n}}{1-\frac{2}{n^3}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{0}{1-0} = 0$$

nach Grenzwertsätzen

$$b_n = \frac{n^3-2}{n^2} = n - \frac{2}{n^2} \xrightarrow{(n\to\infty)} \infty$$

$$c_n = n-1 \to \infty$$

$$d_n = \frac{n^3-2}{n^2} - (n-1) = \cancel{n} - \frac{2}{n^2} - \cancel{n} + 1$$

$$= 1 - \frac{2}{n^2} \xrightarrow{(n\to\infty)} 1 - 0 = 1$$

Aufgabe 4

a) $$x_n = \frac{2n^2-4n+8}{n^2+5n+10}$$

Zähler und Nenner durch n^2 teilen

$$= \frac{\frac{2n^2}{n^2} - \frac{4n}{n^2} + \frac{8}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2} + \frac{5n}{n^2} + \frac{10}{n^2}}$$

$$= \frac{2 - \frac{4}{n} + \frac{8}{n^2}}{1 + \frac{5}{n} + \frac{10}{n^2}}$$

$$\xrightarrow{n\to\infty} \frac{2-0+0}{1+0+0} = \frac{2}{1} = 2$$

nach den Grenzwertsätzen

d.h. $x_n \to 2$ für $n \to \infty$.

bzw. $\lim\limits_{x_n\to\infty} x_n = 2$.

b) $$x_n = \frac{5n^3+4n^2-8n+15}{8n^3-2n^2+4n-9}$$

Zähler und Nenner durch n^3 teilen

$$= \frac{5 + \frac{4}{n} - \frac{8}{n^2} + \frac{15}{n^3}}{8 - \frac{2}{n} + \frac{4}{n^2} - \frac{9}{n^3}}$$

$$\xrightarrow{(n\to\infty)} \frac{5+0-0+0}{8-0+0-0} = \frac{5}{8}$$

d.h. $x_n \to \frac{5}{8}$ $(n\to\infty)$

c) $$x_n = \frac{n^2+2n+6}{n+7}$$

Zähler konvergiert schneller gegen ∞ als Nenner. Zähler und Nenner durch n teilen

$$= \frac{n+2+\frac{6}{n}}{1+\frac{7}{n}}$$

Der Nenner konvergiert gegen 1.

Der Zähler wird beliebig groß, wenn n nur groß genug gewählt wird.

$\Rightarrow a_n \to \infty$ $(n\to\infty)$

d) $$x_n = \frac{1-n+n^2}{n(n+1)}$$

$$= \frac{\frac{1}{n^2} - \frac{n}{n^2} + \frac{n^2}{n^2}}{\frac{n}{n}\,\frac{n+1}{n}}$$

$$= \frac{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n} + 1}{1\cdot(1+\frac{1}{n})} \xrightarrow{(n\to\infty)} \frac{0-0+1}{1} = 1$$

d.h. $x_n \to 1$ $(n\to\infty)$.

e) $$x_n = \frac{n^3-1}{n^2+3} - \frac{n^3(n-2)}{n^2+1}$$

$$= \frac{(n^3-1)(n^2+1) - (n^2+3)n^3(n-2)}{(n^2+3)(n^2+1)}$$

$$= \frac{n^5+n^3-n^2-1-(n^6-2n^5+3n^4-6n^3)}{n^4+n^2+3n^2+3}$$

$$= \frac{-n^6+3n^5-3n^4+7n^3-n^2-1}{n^4+4n^2+3}$$

$$= \frac{\underbrace{-n^2+3n-3}_{\to -\infty} + \underbrace{7\frac{1}{n}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{1}{n^4}}_{\to 0}}{1 + \underbrace{4\cdot\frac{1}{n^2}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{3}{n^4}}_{\to 0}} \xrightarrow{(n\to\infty)} -\infty$$

d.h. $x_n \to -\infty$ $(n\to\infty)$.

f) $$x_n = \frac{\sqrt{3n}+9}{\sqrt{10n}-4} = \frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{n}+9}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{n}-4}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+\frac{9}{\sqrt{n}}}{\sqrt{10}-\frac{4}{\sqrt{n}}} \xrightarrow{(n\to\infty)} \frac{\sqrt{3}+0}{\sqrt{10}-0} = \sqrt{0{,}3}$$

d.h. $x_n \to \sqrt{0{,}3}$ $(n\to\infty)$.